I.1 $\emptyset \in \mathcal{T}_0$; $A \in \mathcal{T}_0 \iff A$ ou A' dénombrable $\iff (A')'$ ou A' dénombrable
$\iff A' \in \mathcal{T}_0$

$(A_n)_n \subset \mathcal{T}_0$; si $\forall n$ A_n dénombrable, $A := \bigcup_n A_n$ est dénombrable et $A \in \mathcal{T}_0$.
si $\exists n_0 \mid A'_{n_0}$ dénombrable $A' = \bigcap_n A'_n \subset A'_{n_0}$ est dénombrable et $A \in \mathcal{T}_0$.

I.2 $\{x\} = \{x, x+1, x+2\} \cap \{x+1, x+2, x+3\}'$
donc $\mathcal{T}_1$ contient les singletons donc toutes les parties dénombrables donc toutes les parties de complémentaire dénombrables. Donc $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_0$.
$\mathcal{T}_2$ contient tous les $\{x, x+1, x+2\}$ donc $\mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_1$. $\mathcal{T}_0$ contient toutes les parties finies donc $\mathcal{T}_0$ contient $\mathcal{T}_2$. Conclusion $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_0$.

I.3 $[0,1]$ et $[0,1]'$ sont non dénombrables et boréliens donc $[0,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_0 \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

II.1 $e^{-a_n x}$ est continue donc Lebesgue mesurable. On a

$$\int_{[0,n]} e^{-a_n x} \, d\lambda(x) = \int_0^n e^{-a_n x} \, dx = \frac{1}{a_n}\left(1 - e^{-a_n n}\right) \to \frac{1}{a_n}$$

Beppo Levi $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{[0,\infty[} e^{-a_n x} \, d\lambda(x) = \frac{1}{a_n} < +\infty$ donc $e^{-a_n x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, d\lambda)$.
Par linéarité f_n est intégrable.

II.2 $(f_n(x))_n$ est une suite croissante de fonctions boréliennes ≥ 0 donc sa limite simple f existe dans $[0, +\infty]$ et f est borélienne.

II.3 Beppo Levi $\Rightarrow$ $\displaystyle\int f_n(x) \, d\lambda(x) \to \int f(x) \, d\lambda(x)$
or $\displaystyle\int f_n(x) \, d\lambda(x) = \sum_1^n a_k^{-1}$ donc $\displaystyle\int f(x) \, d\lambda(x) = \sum_1^\infty a_n^{-1} < +\infty \iff f \in \mathcal{L}^1$.

III.1 f est continue sur $]0,\infty[$ donc mesurable.

$x \to 0$ $\sin x \sim x$ et $\log(1+x) \sim x$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

f est donc bornée continue sur $]0,\pi]$ donc λ-intégrable.

III.2 $$\int_0^A f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^\pi f(x)\,dx}_{\substack{\text{existe car}\\ f \text{ se prolonge en}\\ \text{une fonction } C^0([0,\pi])}} + \int_\pi^A f(x)\,dx$$

$$\int_\pi^A \frac{\sin x}{\log(1+x)}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{\log(1+x)}\right]_\pi^A - \int_\pi^A \frac{\cos x}{(\log(1+x))^2}\,\frac{1}{1+x}\,dx$$

$\begin{cases} u' = \sin x \\ v = \dfrac{1}{\log(1+x)} \end{cases}$

$$= \frac{1}{\log(1+\pi)} - \frac{\cos A}{\log 1+A} - \int_{\log(1+\pi)}^{\log(1+A)} \frac{\cos(e^t-1)}{t^2}\,dt$$

$t = \log(1+x)$ $\quad dt = \dfrac{dx}{1+x}$

$x = e^t - 1$

or $\left|\dfrac{\cos(e^t-1)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2} \in \mathcal{L}^1([\log(1+\pi),\infty[)$

donc
$$\exists \lim_{A\to+\infty} \int_\pi^A \frac{\sin x}{\log(1+x)}\,dx = \frac{1}{\log(1+\pi)} - \int_{[\log(1+\pi),\infty[} \frac{\cos(e^t-1)}{t^2}\,d\lambda(t)$$

et finalement
$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_{]0,\pi]} f(x)\,d\lambda(x) + \frac{1}{\log(1+\pi)} - \int_{[\log(1+\pi),\infty[} \frac{\cos(e^t-1)}{t^2}\,d\lambda(t).$$

III.3 $$\int_{[\pi,\infty[} \left|\frac{\sin x}{\log(1+x)}\right| d\lambda(x) = \sum_1^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\log(1+x)}\,dx \geq \sum_1^\infty \frac{1}{\log(1+(k+1)\pi)}\cdot 2$$

or $\log(1+x) \leq x$ donc $\displaystyle\int_{[\pi,\infty[} \left|\frac{\sin x}{\log(1+x)}\right| d\lambda(x) \geq 2\sum_1^\infty \frac{1}{k\pi} = +\infty.$

IV.1 . $x \mapsto e^{-tg(x)}$ est λ-mesurable car g est mesurable et $y \mapsto e^{-ty}$ aussi car continue.

. De plus $|e^{-tg(x)}| \leq 1$ pour $t \geq 0$ et $1 \in \mathcal{L}^1([0,1], d\lambda)$

Donc $f(t)$ est bien définie.

. de plus $(t \mapsto e^{-tg(x)}) \in C^0([0,\infty[)$ pour tout x fixé de $[0,1]$

. $|e^{-tg(x)}| \leq 1 \in \mathcal{L}^1([0,1], d\lambda)$ $\quad \forall t \in [0,\infty[$, $\forall x \in [0,1]$.

Donc $(t \mapsto f(t)) \in C^0([0,\infty[)$.

IV.2 . $(t \mapsto e^{-tg(x)}) \in C^1([0,\infty[)$ $\forall x \in [0,1]$

. $\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tg(x)}\right)\right| = \left|-g(x)\, e^{-tg(x)}\right| \leq g(x) \in \mathcal{L}^1([0,1], d\lambda)$ $\forall t \in [0,\infty[$

Donc $f \in C^1([0,\infty[)$ et $f'(t) = -\int_{[0,1]} g(x)\, e^{-tg(x)}\, d\lambda(x)$.

IV.3 Fatou : Si g_n est une suite de fonctions μ-mesurables et positives sur $(X, \mathcal{Y}, \mu)$ alors $\int_X (\liminf_n g_n)\, d\mu \leq \liminf_n \int_X g_n\, d\mu$.

$g_n(x) := n\left(1 - e^{-\frac{g(x)}{n}}\right)$ est continue donc λ-mesurable et comme

$e^y = 1 + y + o(y)$, $|y| \to 0$, $g_n(x) = n\left(1 - 1 + \frac{g(x)}{n} + o\left(\frac{g(x)}{n}\right)\right) = g(x) + o(1)$

Donc $\liminf g_n(x) = \lim g_n(x) = g(x)$

$$\int_{[0,1]} g(x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \liminf g_n\, d\lambda \leq \liminf_n \int_{[0,1]} g_n\, d\lambda = \liminf \frac{f(0) - f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

$$= -f'_d(0) < \infty$$

Donc $g \in \mathcal{L}^1([0,1], d\lambda)$

V $a > 1$ $\quad I = \int_{B(0,1)} \frac{d\lambda(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$

$d\lambda(x,y,z) = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ $\quad r \in]0,1[$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ $\quad$, $= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left[\int_0^\pi [\ldots]\, d\theta\right] dr\right] d\varphi$

$I = 4\pi/3a$