UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies **DEVUIP** Service Scolarité	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **Session 1 d'automne** **PARCOURS : Ingé. math.** **CODE UE : MA5022** **Epreuve : Intégration** **Date : 17 décembre 2013. Heure : 14h.-17h. Durée : 3h.** **Salle : Amphithéâtre Poincaré, bâtiment A22** Epreuve de : A. Bachelot Documents : **Non autorisés.**	Département DUL Licence

Nota bene : il sera tenu grand compte de la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Soient $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R})$ et deux réels a et b.

1 Montrer que l'ensemble $\Gamma(a,b) := \{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2,\ \ t \in [a,b]\}$ est Lebesgue négligeable dans $\mathbb{R}^2$.

2 Montrer que l'ensemble $G(a,b) := \{(\varphi(t), f(t)) \in \mathbb{R}^2,\ \ t \in [a,b]\}$ est Lebesgue négligeable dans $\mathbb{R}^2$.

3 En déduire que $G := \{(\varphi(t), f(t)) \in \mathbb{R}^2,\ \ t \in \mathbb{R}\}$ est Lebesgue négligeable dans $\mathbb{R}^2$.

4 (Question hors barême) Est-ce que le résultat précédent est encore vrai si φ est seulement continu ?

Exercice 2. Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \dfrac{\cos x}{\log(1+\sqrt{x})}$.

1 Montrer que f est intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, \pi]$.

2 Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ existe.

3 Montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[\pi, \infty[$.

Exercice 3. On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $0 < \mu(X) < \infty$. Soit $f \in L^\infty(X, \mu)$, $f \neq 0$.

1 Montrer que $f \in L^p(X, \mu)$ pour tout $p \geq 1$.

2 Montrer que l'application $p \mapsto \|f\|_{L^p}$ est continue sur $[1, \infty[$.

3 On considère un réel A tel que $0 < A < \|f\|_{L^\infty}$. En considérant l'ensemble $\{x \in X;\ |\ f(x)\ | \geq A\}$, montrer que $A \leq \liminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$. En déduire que $\|f\|_{L^p}$ tend vers $\|f\|_{L^\infty}$ quand $p \to \infty$.

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$J(x) = \int_0^\pi \cos(x\cos\theta)\, d\theta.$$

1 Montrer que $J \in C^1(\mathbb{R})$.

2 Montrer que $J \in C^2(\mathbb{R})$.

3 Montrer que $xJ''(x) + J'(x) + xJ(x) = 0$.

C'est tout.