Université Bordeaux 1 - CPBX - PC écoles S4 - Correction du devoir surveillé du 6 mars 2010.

Exercice 1. Indiquez pour chaque énonçé suivant s'il est VRAI ou FAUX. Dans ce dernier cas, donner un contre-exemple et modifier l'énoncé pour qu'il devienne vrai.

a. Toute fonction $f \in CM([a,b];E)$ vérifiant $\int_a^b \| f(t) \| \, dt = 0$ est identiquement nulle.

□ FAUX comme le montre le contre-exemple $f(t) = \mathbf{1_{\{a\}}(t)}$. L'énoncé est vrai si $f \in C^0([a,b];E)$. ■

b. La dérivée d'une fonction f qui est C^1 par morceau sur $[a,b]$, est prolongeable en une fonction continue par morceau sur $[a,b]$.

□ VRAI. ■

c. Pour toute fonction f qui soit C^1 par morceau sur $[a,b]$ et tout $x, y \in [a,b]$, on a $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt$.

□ FAUX comme le montre le contre-exemple $f(t) = \mathbf{1_{\{a\}}(t)}$. L'énoncé est vrai si f appartient de plus à $C^0([a,b];E)$. ■

Exercice 2. En utilisant une somme de Riemann, montrer que

$$\sum_{i=n}^{i=2n} \frac{1}{i}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

□ On écrit

$$\sum_{i=n}^{i=2n} \frac{1}{i} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2.$$

■

Exercice 3. **a.** Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt.$$

□ On écrit

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt.$$

Le changement de variable $x = \frac{2t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ donne :

$$I = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

■

b. Montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 - nk + k^2}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

□ On remarque que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ avec $f(t) = \frac{1}{1-t+t^2}$. Puique $1 - t + t^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (car le discriminant vaut -3), f est continue sur $[0,1]$ et le théorème de la convergence des sommes de Riemann assure que S_n converge I quand n tend vers l'infini. ■

Exercice 4. **a.** Calculer
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+t^2}dt.$$

□ Cette intégrale vaut $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$. Or comme $0 < \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < 1$, on a $0 < \arctan\frac{1}{2},\ \arctan\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$, et donc $0 < \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$. On calcule $\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) = 1$ et on en déduit que $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. ■

b. Montrer que pour tout $t \geq 0$ et N entier, on a
$$\left|\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^{2k}\right| \leq t^{2N+2}.$$

□ on écrit
$$\left|\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^{2k}\right| = \left|\frac{(-t^2)^{N+1}}{1-(-t^2)}\right| \leq t^{2N+2}.$$

■

c. En déduire que pour tout $a \geq 0$ on a
$$\left|\arctan a - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}a^{2k+1}\right| \leq \frac{a^{2N+3}}{2N+3}.$$

□ en utilisant b), on écrit
$$\left|\int_0^a \left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^{2k}\right)dt\right| \leq \int_0^a \left|\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^{2k}\right|dt \leq \int_0^a t^{2N+2}dt = \frac{a^{2N+3}}{2N+3}.$$

■

d. Montrer que pour tout entier N on a :
$$\left|\pi - 2\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{4^k} + \frac{2}{3}\frac{1}{9^k}\right)\right| \leq \frac{1}{(2N+3)4^N}.$$

□ En utilisant a) puis c) avec $a = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{3}$, on écrit

$$\begin{aligned}
&\left|\pi - 2\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{4^k} + \frac{2}{3}\frac{1}{9^k}\right)\right| \\
&\quad= 4\left|\arctan\frac{1}{2} + \arctan 13 - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}\right| \\
&\quad\leq 4\left|\arctan\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\right| + 4\left|\arctan\frac{1}{3} - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}\right| \\
&\quad\leq \frac{4}{2N+3}(\frac{1}{2})^{2N+3} + \frac{4}{2N+3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2N+3} \\
&\quad\leq \frac{8}{2N+3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+3} = \frac{1}{(2N+3)4^N}.
\end{aligned}$$

■