Université Bordeaux 1 - CPBX - PC écoles S4 - Correction du devoir surveillé du 4 mars 2011.

Exercice 1.
Montrer que la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+\sqrt{kn}}$ admet une limite quand $n \to \infty$ que l'on calculera.

☐ On remarque que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1+\sqrt{\frac{k}{n}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ est une fonction continue sur $[0,1]$. Le théorème des sommes de Riemann assure que u_n converge vers $I = \int_0^1 f(x)dx$. Le changement de variables $t = \sqrt{x}$ donne

$$I = \int_0^1 \frac{2t}{1+t} dt = \int_0^1 2 - \frac{2}{1+t} dt = 2 - 2\ln 2. \ \blacksquare$$

Exercice 2. Montrer que toute fonction $f \in C^0([a,b];E)$ vérifiant $\int_a^b \parallel f(t) \parallel dt = 0$ est identiquement nulle.

☐ Supposons qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Par continuité de f, il existe $0 < h < b-a$ tel que sur l'intervalle $I = [t_0 - h, t_0 + h] \cap [a,b]$, on ait $\parallel f(t) \parallel \geq \frac{1}{2} \parallel f(t_0) \parallel$. On en déduit que $\int_a^b \parallel f(t) \parallel dt \geq \int_I \parallel f(t) \parallel dt \geq \frac{h}{2} \parallel f(t_0) \parallel \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse. $\blacksquare$

Exercice 3. **a.** En utilisant une intégration par partie, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx.$$

☐ On écrit

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 1.\ln(1+x^2)dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \ln 2 - 2 + 2\left[\arctan x\right]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

b. Montrer que la suite

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

☐ u_n est strictement positif et on remarque que $\ln u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ avec $f(t) = \ln(1+x^2)$. Le théorème de la convergence des sommes de Riemann assure que $\ln u_n$ converge I quand n tend vers l'infini, et comme l'exponentielle est une fonction continue, on conclut que u_n converge vers $e^I = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. $\blacksquare$

Exercice 4. **a.** Soit $F \in C^2([0,T];E)$ vérifiant $F(0) = F'(0) = 0$ et $F''(t) \leq Ct$. Montrer que $F(t) \leq \frac{C}{6}t^3$.

☐ On écrit $\mid F'(x) \mid = \mid \int_0^x F''(t)dt \mid \leq \int_0^x Ctdt = C\frac{t^2}{2}$, et $\mid F(x) \mid = \mid \int_0^x F'(t)dt \mid \leq \int_0^x C\frac{t^2}{2}dt = C\frac{t^3}{6}$. $\blacksquare$

b. Soit $f \in C^2([a,b];E)$. Pour $t \in [0, \frac{b-a}{2}]$ et $c = \frac{a+b}{2}$, on pose $F(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)dx - 2tf(c)$. Calculer $F(0)$, $F'(0)$ et montrer que $\|F''(t)\| \leq 2t\|f''\|_\infty$.

☐ On calcule $F'(t) = f(c+t) + f(c-t) - 2f(c)$, $F''(t) = f'(c+t) - f'(c-t)$ et par le théorème des accroissements finis $\mid F''(t) \mid \leq 2t \parallel f'' \parallel_\infty$. $\blacksquare$

c. On pose $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Montrer que

$$\left\|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)\right\| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\|_\infty.$$

□ On utilise les résultats précédents avec $a = a_k$, $b = a_{k+1}$, $c = \frac{a_k+a_{k+1}}{2}(= c_k)$, $C = 2 \parallel f \parallel_\infty$ pour déduire que $| \int_{c_k-t}^{c_k+t} f(x)dx - 2tf(c_k) |\leq 2\|f''\|_\infty \frac{t^3}{6}$ et avec $t = \frac{b-a}{2n}$ on obtient $| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}f(c_k) |\leq \frac{(b-a)^3}{24n^3}\|f''\|_\infty$. On conclut avec la relation de Chasles qui donne

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)\right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}f\left(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\right)\right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{24n^3}\|f''\|_\infty = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\|_\infty. \blacksquare\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq 0$. On définit

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{zt}}{1-t}dt,\quad k \in \mathbb{N},\quad I_k = \int_0^{\frac{1}{2}} t^k e^{zt}dt.$$

a. Calculer I_0 et donner une relation entre I_{k+1} et I_k.

□ Un calcul direct et une intégration par partie donnent

$$I_0 = \frac{e^{z/2}-1}{z},\quad I_{k+1} = \frac{e^{z/2}}{2^{k+1}z} - \frac{k+1}{z}I_k. \blacksquare$$

b. montrer que pour tout entier n

$$\left|I - \sum_{k=0}^{n} I_k\right| \leq \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}.$$

□ Pour $t \in [0, 1/2]$ on a $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$, et $\left|\frac{t^{n+1}}{1-t}e^{zt}\right| \leq 2t^{n+1}$ d'où

$$\left|I - \sum_{k=0}^{n} I_k\right| = \left|\int_0^{1/2}\frac{t^{n+1}}{1-t}e^{zt}dt\right| \leq \int_0^{1/2}\left|\frac{t^{n+1}}{1-t}e^{zt}\right|dt \leq \int_0^{1/2} 2t^{n+1} = \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}. \blacksquare$$

c. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près des intégrales

$$J = \int_0^{1/2}\frac{\cos(2\pi t)}{1-t}dt,\quad H = \int_0^{1/2}\frac{\sin(2\pi t)}{1-t}dt.$$

□ On choisit $z = 2i\pi$ et on calcule $I_0 = \frac{i}{\pi}$, $I_1 = \frac{i}{4\pi} - \frac{1}{2\pi^2}$ et comme $| I - I_0 - I_1 |\leq \frac{1}{12}$ et $I = J + iH$, on en déduit que $J \sim -\frac{1}{2\pi^2}$ et $H \sim \frac{5}{4\pi}$ à 10^{-1} près. $\blacksquare$