Université Bordeaux 1 - CPBX - PC écoles S4 - Correction du devoir surveillé du 4 avril 2012.

Exercice 1. [Question de cours] Soit $f \in C^0([a,b];E)$. Montrer que si $\int_a^b \|f(t)\|dt = 0$, alors $f = 0$. Ce résultat est-il encore vrai pour $f \in CM([a,b];E)$?

Exercice 2. **a.** Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}dt.$$

☐ On écrit

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+t\right)^2 + \frac{3}{4}}dt = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}dt.$$

Le changement de variable $x = \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ donne :

$$I = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

■

b. Montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+nk+k^2}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

☐ On remarque que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ avec $f(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$. Puique f est continue sur $[0,1]$, le théorème de la convergence des sommes de Riemann assure que S_n converge I quand n tend vers l'infini.

■

Exercice 3. Soit $f \in C^0([a,b];E)$. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0,1]$ et $C > 0$ tels que pour tout $x, y \in [a,b]$ on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \mid x - y \mid^\alpha .$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\left\| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right\| \leq \frac{C}{\alpha+1}\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n^\alpha}.$$

☐ La formule de Chasles permet d'écrire

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \left[f(t) - f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]dt + \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)dt\right).$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \left\| \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \left[f(t) - f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] dt\right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \left\| f(t) - f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right\| dt \\
&\leq C\sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \left(a+k\frac{b-a}{n} - t\right)^\alpha dt \\
&= C\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{\alpha+1} = \frac{C}{\alpha+1}\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n^\alpha}.
\end{aligned}
$$

■

Exercice 4. Soit $f_n(x) = \frac{n}{n^2x^2-2nx+2}$. Montrer que $f_n \in C^0([0,1]$. Etudiez, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} \| f_n \|_\infty$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

□ Comme le discriminant du dénominateur est égal à $-n^2$, la fonction f_n est bien définie continue sur $[0,1]$. Pour $x \in]0,1]$, $f_n(x)$ est équivalent à $\frac{1}{n^2x}$ quand $n \to \infty$, et donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. D'autre part $f_n(0) = \frac{n}{2} \to \infty$, et donc $\lim_{n\to\infty} \| f_n \|_\infty = \infty$. Enfin en utilisant les changements de variables $y = nx$ puis $z = y - 1$, on évalue :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2-2nx+2}dx \\
&= \int_0^n \frac{1}{y^2-2y+2}dy = \int_0^n \frac{1}{(y-1)^2+1}dy \\
&= \int_{-1}^{n-1} \frac{1}{1+z^2}dz \\
&= [\arctan z]_{-1}^{n-1} \to \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

■

Exercice 5. Soit $f(t) = \frac{\sin(t)}{\ln(1+t)}$.

a. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$.

□ La fonction étant continue sur $]0,1]$ il suffit d'étudier son comportement en 0. Or $\sin t$ et $\ln(1+t)$ sont équivalents à t quand t tend vers zéro. Donc $f(t)$ est équivalent à 1 à l'origine et f est intégrable sur $]0,1]$.
■

b. Montrer que l'intégrale généralisée de f sur $[1,\infty[$ est convergente.

□ Etant donné $b > 1$, une intégration par partie donne

$$\int_1^b f(t)dt = \frac{\cos 1}{\ln 2} - \int_1^b g(t)dt, \quad g(t) := \frac{\cos t}{(\ln(1+t))^2(1+t)}.$$

Or $| g(t) | \leq \frac{1}{(\ln(1+t))^2(1+t)}$ et le changement de variable $\ln(1+t) = x$ donne

$$\int_1^b \frac{1}{(\ln(1+t))^2(1+t)}dt = \int_{\ln 2}^{\ln(1+b)} \frac{1}{x^2}dx.$$

Sachant que x^{-2} est intégrable sur $[\ln 2, \infty[$ on en déduit que g est intégrable sur sur $[1, \infty[$ et en faisant tendre b vers l'infini on conclut que l'intégrale généralisée de f converge et vaut

$$\int_1^{\infty} f(t)dt = \frac{\cos 1}{\ln 2} - \int_1^{\infty} g(t)dt.$$

■

c. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$.

□ On utilise la formule de Chasles et la croissance et la positivité du logarithme pour obtenir les minorations suivantes :

$$\int_1^{n\pi} \mid f(t) \mid dt \geq \int_{\pi}^{n\pi} \mid f(t) \mid dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mid \sin t \mid}{\ln(1+t)} dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\ln(1+(k+1)\pi)} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mid \sin t \mid dt.$$

En tirant partie du fait que $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$, et que $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mid \sin t \mid dt = 2$ pour tout entier k, on conclut que

$$\int_1^{n\pi} \mid f(t) \mid dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

■