Exercice 1. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}.$$

□ On écrit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(n)$ où $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$. Comme $f \in C^0([0,1])$, le théorème de la convergence des sommes de Riemann assure alors que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt = \left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2}.$$

■

Exercice 2. Soit $f_n(t) = \frac{n}{n^2t^2-nt+1}$. Montrer que $f_n \in C^0([0,1]$. Etudiez, $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$, $\lim_{n\to\infty} \| f_n \|_\infty$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$.

□ Comme le discriminant du dénominateur est égal à $-3n^2$, la fonction f_n est bien définie continue sur $[0,1]$. Pour $t \in]0,1]$, $f_n(x)$ est équivalent à $\frac{1}{nt^2}$ quand $n \to \infty$, et donc $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$. D'autre part $f_n(0) = n \to \infty$, et donc $\lim_{n\to\infty} \| f_n \|_\infty = \infty$. Le changement de variable $x = nt$ donne

$$I_n := \int_0^1 \frac{n}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{4}{3}\int_0^n \frac{1}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx.$$

Le changement de variable $y = \frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ donne :

$$I_n = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2n-1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2n-1}{\sqrt{3}} - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

■

Exercice 3. **a.** Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ et que pour tout $t \geq 1$, on a $0 \leq \ln(1+t) \leq 4t^{\frac{1}{4}}$.

□ On compare les fonctions en $t=0$ (respectivement $t=1$) et on compare les dérivées $\frac{1}{1+t} \leq 1$ pour $t \geq 0$ (respectivement $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$ pour $t \geq 1$). ■

b. En déduire que la fonction $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est intégrable sur $]0,\infty[$.

□ En utilisant la question précédente, $0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \leq \frac{1}{x^2}$ assure l'intégrabilité sur $[1,\infty[$ et $0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \leq \frac{4}{\sqrt{x}}$ assure l'intégrabilité sur $]0,1]$.■

c. A l'aide d'une intégration par partie, calculer

$$\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

□ Pour $0 < a < b < \infty$ on écrit

$$\int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) + 2\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx.$$

En utilisant la première question $0 \leq b \ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) \leq \frac{1}{b} \to 0$, $b \to \infty$, et $0 \leq a \ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) \leq 4\sqrt{a} \to 0$, $a \to 0$. Comme $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$, on en conclut que $\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = \pi$. ■

Exercice 4. **a.** Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$$

est convergente.

□ La fonction $f(x) := \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,\infty[$. En zéro elle est équivalente à $x^{-\frac{1}{2}}$ qui est intégrable sur $]0,\pi]$. Donc f est intégrable sur $]0,\pi]$. Une intégration par parties sur $[\pi, b]$ donne :

$$\int_\pi^b f(x)dx = \frac{\sin b}{b} + \frac{1}{2}\int_\pi^b \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx.$$

Comme $\left|\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leq x^{-\frac{3}{2}}$ qui est intégrable sur $[\pi,\infty[$, on en déduit que $\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[\pi,\infty[$, et comme $\frac{\sin b}{b} \to 0$ quand $b \to \infty$, on conclut que l'intégrale de f sur $]0,\infty[$ est convergente. ■

b. Montrer que la fonction $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$.

□ On écrit pour tout entier $N \geq 2$:

$$\int_0^{N\pi} \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| dx \geq \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| dx \geq \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi \left|\frac{\cos x}{\sqrt{(k+1)\pi}}\right| dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \to \infty, \quad N \to \infty.$$

■

Exercice 5. **a.** Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

est convergente.

□ La fonction $\frac{1+t^2}{1+t^4}$ est continue sur $[1,\infty[$ et équivalente à t^{-2} à l'infini. Donc elle est intégrable sur $[1,\infty[$. ■

b. Calculer sa valeur à l'aide du changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$ dont on justifiera l'emploi.

□ La fonction $\varphi :\ t \mapsto x = t - \frac{1}{t}$ est strictement croissante sur $]0,\infty[$ car $\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$. Comme $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = -\infty$, et $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que φ est une bijection C^1 de $]0,\infty[$ sur $]-\infty,\infty[$. On écrit $dx = \frac{1+t^2}{t^2}dt$ et en remarquant que $\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{1}{x^2+2}$, le théorème de changement de variable donne :

$$\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\blacksquare$