Université de Bordeaux - CPPBX - PC S4 - Correction du devoir surveillé du 28 mars 2014.

Exercice 1. **a.** Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt.$$

☐ On écrit

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+t\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt.$$

Le changement de variable $x = \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ donne :

$$I = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

■

b. Montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+nk+k^2}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

☐ On remarque que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ avec $f(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$. Puique f est continue sur $[0,1]$, le théorème de la convergence des sommes de Riemann assure que S_n converge I quand n tend vers l'infini. ■

Exercice 2. On définit

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2i\pi t}}{1-t} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad I_k = \int_0^{\frac{1}{2}} t^k e^{2i\pi t} dt.$$

a. Calculer I_0 et donner une relation entre I_{k+1} et I_k.

☐ Un calcul direct et une intégration par partie donnent

$$I_0 = \frac{i}{\pi}, \quad I_{k+1} = \frac{i}{2^{k+2}\pi} + \frac{(k+1)i}{2\pi} I_k. \quad ■$$

b. Montrer que pour tout entier n

$$\left| I - \sum_{k=0}^n I_k \right| \leq \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}.$$

☐ Pour $t \in [0, 1/2]$ on a $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$, et $\left| \frac{t^{n+1}}{1-t} e^{2i\pi t} \right| \leq 2t^{n+1}$ d'où

$$\left| I - \sum_{k=0}^n I_k \right| = \left| \int_0^{1/2} \frac{t^{n+1}}{1-t} e^{2i\pi t} dt \right| \leq \int_0^{1/2} \left| \frac{t^{n+1}}{1-t} e^{2i\pi t} \right| dt \leq \int_0^{1/2} 2t^{n+1} = \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}. \quad ■$$

c. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près des intégrales

$$J = \int_0^{1/2} \frac{\cos(2\pi t)}{1-t} dt, \quad H = \int_0^{1/2} \frac{\sin(2\pi t)}{1-t} dt.$$

☐ On a $I_0 = \frac{i}{\pi}$, $I_1 = \frac{i}{4\pi} - \frac{1}{2\pi^2}$ et comme $\mid I - I_0 - I_1 \mid \leq \frac{1}{12}$ et $I = J + iH$, on en déduit que $J \sim -\frac{1}{2\pi^2}$ et $H \sim \frac{5}{4\pi}$ à 10^{-1} près. ■

Exercice 3. **a.** Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

est convergente.

$\square$ La fonction $f(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, \infty[$. En zéro elle est équivalente à $x^{\frac{1}{2}}$ qui est intégrable sur $[0, \pi]$. Donc f est intégrable sur $[0, \pi]$. Une intégration par parties sur $[\pi, b]$ donne :

$$\int_\pi^b f(x)dx = -\frac{\cos b}{b} - \frac{1}{2}\int_\pi^b \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Comme $\left|\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \le x^{-\frac{3}{2}}$ qui est intégrable sur $[\pi, \infty[$, on en déduit que $\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[\pi, \infty[$, et comme $\frac{\cos b}{b} \to 0$ quand $b \to \infty$, on conclut que l'intégrale de f sur $]0, \infty[$ est convergente. $\blacksquare$

b. Montrer que la fonction $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$.

$\square$ On écrit pour tout entier $N \ge 2$:

$$\int_0^{N\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| dx \ge \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| dx \ge \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi \left|\frac{\sin x}{\sqrt{(k+1)\pi}}\right| dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \to \infty, \quad N \to \infty.$$

$\blacksquare$

Exercice 4. **a.** Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

est convergente.

$\square$ La fonction $\frac{1+t^2}{1+t^4}$ est continue sur $[1, \infty[$ et équivalente à t^{-2} à l'infini. Donc elle est intégrable sur $[1, \infty[$. $\blacksquare$

b. Calculer sa valeur à l'aide du changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$ dont on justifiera l'emploi.

$\square$ La fonction $\varphi :\ t \mapsto x = t - \frac{1}{t}$ est strictement croissante sur $]0, \infty[$ car $\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$. Comme $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = -\infty$, et $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que φ est une bijection C^1 de $]0, \infty[$ sur $]-\infty, \infty[$. On écrit $dx = \frac{1+t^2}{t^2} dt$ et on remarque que $\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{1}{x^2+2}$, puis on pose $y = x/\sqrt{2}$ et le théorème de changement de variable donne :

$$\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\blacksquare$

Exercice 5.

a. Enoncer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre de Lebesgue.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^\infty \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

Montrer que $F(x)$ existe et que $F \in C^1(\mathbb{R})$.

☐ On note $f(t,x) := \cos(xt)e^{-t^2}$. Comme $\mid f(t,x) \mid \leq e^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$, F est bien définie. De plus $x \mapsto f(t,x)$ est $C^1(\mathbb{R})$ et pour tout x, $\mid \partial_x f(t,x) \mid \leq te^{-t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Lebesgue assure que $F \in C^1(\mathbb{R})$ et

$$F'(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \sin(xt)te^{-t^2}\,dt$$

■

c. En utilisant une intégration par partie, exprimer $F'(x)$ en fonction de x et de $F(x)$.

☐ Pour $a > 0$, on écrit

$$-\int_{-a}^{a} \sin(xt)te^{-t^2}\,dt = \left[(-\sin(xt))\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\right]_{-a}^{a} - \frac{x}{2}\int_{-a}^{a} \cos(xt)e^{-t^2}\,dt.$$

En faisant tendre a vers l'infini, on en déduite que $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$. ■

d. En déduire la valeur de $F(x)$ (on rappelle que $F(0) = \sqrt{\pi}$).

☐ On remarque que $\left(e^{\frac{x^2}{4}}F(x)\right)' = 0$ donc $F(x) = F(0)e^{-\frac{x^2}{4}}$ et comme $F(0) = \sqrt{\pi}$, on conclut que $F(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

■