DISVE
Pôle Licence

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010-2011

CPBX PC Ecole Semestre 4 - CPI 426 - Devoir surveillé d'Analyse.

Date : Vendredi 4 mars 2011 **Heure :** 14h.-15h30. **Durée :** 1h30

Lieu : bâtiment A22, amphithéâtre Charles Darwin.

Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.

Exercice 1.

Montrer que la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{kn}}$ admet une limite quand $n \to \infty$ que l'on calculera.

Exercice 2.

Montrer que toute fonction $f \in C^0([a,b];E)$ vérifiant $\int_a^b \| f(t) \| \, dt = 0$ est identiquement nulle.

Exercice 3.

1. En utilisant une intégration par partie, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx.$$

2. Montrer que la suite

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

Exercice 4.

1. Soit $F \in C^2([0,T];E)$ vérifiant $F(0) = F'(0) = 0$ et $F''(t) \leq Ct$. Montrer que $F(t) \leq \frac{C}{6}t^3$.

2. Soit $f \in C^2([a,b];E)$. Pour $t \in [0, \frac{b-a}{2}]$ et $c = \frac{a+b}{2}$, on pose $F(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)dx - 2tf(c)$. Calculer $F(0)$, $F'(0)$ et montrer que $\|F''(t)\| \leq 2t\|f''\|_\infty$.

3. On pose $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Montrer que

$$\left\| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) \right\| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_\infty.$$

Exercice 5.

1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq 0$. On définit

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{zt}}{1-t}dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad I_k = \int_0^{\frac{1}{2}} t^k e^{zt}dt.$$

Calculer I_0 et donner une relation entre I_{k+1} et I_k.

2. montrer que pour tout entier n

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} I_k \right| \leq \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}.$$

3. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près des intégrales

$$J = \int_0^{1/2} \frac{\cos(2\pi t)}{1-t} dt, \quad H = \int_0^{1/2} \frac{\sin(2\pi t)}{1-t} dt.$$

FIN