

CPBX PC Ecole Semestre 4 - CPI 426 - Devoir surveillé d'Analyse.

Date : Lundi 25 mars 2013 **Heure :** 14h.-15h30. **Durée :** 1h30

DISVE

Pôle Licence

Lieu : bâtiment B5, grand amphithéâtre de biologie animale.

Documents non autorisés. Aucun matériel électronique n'est autorisé.

Exercice 1.

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2}.$$

Exercice 2.

Soit $f_n(t) = \frac{n}{n^2 t^2 - nt + 1}$. Montrer que $f_n \in C^0([0, 1])$. Etudiez, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ et que pour tout $t \geq 1$, on a $0 \leq \ln(1+t) \leq 4t^{\frac{1}{4}}$.

2. En déduire que la fonction $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ est intégrable sur $]0, \infty[$.

3. A l'aide d'une intégration par partie, calculer

$$\int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Exercice 4.

1. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

est convergente.

2. Montrer que la fonction $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$.

Exercice 5.

1. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

est convergente.

2. Calculer sa valeur à l'aide du changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$ dont on justifiera l'emploi.

FIN

Le corrigé sera en ligne sur

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~bachelot/enseignement.html>