ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013-2014
CPBX PC Ecole Semestre 4 - UE N1CP402D
Devoir surveillé d'Analyse.
Date : Vendredi 28 mars 2014 **Heure :** 14h.-15h30.
Durée : 1h30 - *Sans document.*

Collège Sciences et technologie

Exercice 1.

1. Calculer l'intégrale
$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}dt.$$

2. Montrer que la suite
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+nk+k^2}$$
admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

Exercice 2.

On définit
$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{e^{2i\pi t}}{1-t}dt,\quad k\in\mathbb{N},\quad I_k=\int_0^{\frac{1}{2}} t^k e^{2i\pi t}dt.$$

1. Calculer I_0 et donner une relation entre I_{k+1} et I_k.

2. Montrer que pour tout entier n
$$\left| I-\sum_{k=0}^{n} I_k\right| \leq \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}.$$

3. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près des intégrales
$$J=\int_0^{1/2}\frac{\cos(2\pi t)}{1-t}dt,\quad H=\int_0^{1/2}\frac{\sin(2\pi t)}{1-t}dt.$$

Exercice 3.

1. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$
est convergente.

2. Montrer que la fonction $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$.

Exercice 4.

1. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^{\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$
est convergente.

2. Calculer sa valeur à l'aide du changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$ dont on justifiera l'emploi.

Exercice 5.

1. Enoncer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre de Lebesgue.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

Montrer que $F(x)$ existe et que $F \in C^1(\mathbb{R})$.

3. En utilisant une intégration par partie, exprimer $F'(x)$ en fonction de x et de $F(x)$.

4. En déduire la valeur de $F(x)$ (on rappelle que $F(0) = \sqrt{\pi}$).

FIN

Le corrigé sera en ligne sur

http ://www.math.u-bordeaux1.fr/∼bachelot/enseignement.html