



DISVE
Pôle Licence

ANNEE UNIVERSITAIRE 2011/2012
SESSION 1 DE PRINTEMPS

Parcours : CPBX, PC écoles
Epreuve : Analyse Code UE : CP402
Date : mardi 31 Mai 2012 Heure : 14h Durée : 1h30
Lieu : A22, Amphithéâtre Wegener
Documents : Non autorisés.
Epreuve de : A. Bachelot



Exercice 1. On pose pour $t > 0$:

$$F(t) = \int_{]0, \infty[} \frac{e^{-tx} - e^{-2x}}{x} dx.$$

- 1 Montrer que $F(t)$ est bien définie.
- 2 Montrer que $F \in C^1(]0, \infty[)$.
- 3 Calculer F' . En déduire F .

Exercice 2.

Pour $R > 0$, on pose $D_R = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $K_R = \{(x, y); |x| \leq R, |y| \leq R\}$.

a Calculer $\int_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$.

b En comparant $\int_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$, $\int_{K_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$ et $\int_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx dy$, donner un encadrement de $\int_0^R e^{-x^2} dx$.

c En déduire que la valeur de

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Exercice 3.

On définit

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x + y + z \leq 1\}.$$

Calculer

$$\iiint_K \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz.$$

Exercice 4.

- 1 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π -périodique f définie sur \mathbb{R} , dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est donnée par $f(x) = e^x$.
- 2 Énoncer le théorème de Parseval et le théorème de Dirichlet.
- 3 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

FIN