



DISVE  
Pôle Licence

ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013  
SESSION 1 DE PRINTEMPS

Parcours : CPBX, PC écoles  
Epreuve : Analyse Code UE : CP402  
Date : mardi 27 Mai 2013 Heure : 8h30 Durée : 1h30  
Lieu : A22, Amphithéâtre Darwin  
Documents : Non autorisés.  
Epreuve de : A. Bachelot



**Exercice 1.** On pose pour  $t > 0$  :

$$F(t) = \int_{]0, \infty[} \frac{e^{-tx^2} - e^{-x^2}}{x^2} dx.$$

- 1 Montrer que  $F(t)$  est bien définie.
- 2 Enoncer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre de Lebesgue.
- 3 Montrer que pour tout  $0 < a < b < \infty$ ,  $F \in C^1([a, b])$ .
- 4 Calculer  $F'$  (on rappelle que  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ).
- 5 En déduire  $F$ .

**Exercice 2.** 1 Calculer

$$\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt.$$

- 2 Soit  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Sans faire de changement de variables, calculer

$$I := \iint_K \frac{x}{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

- 3 Recalculer  $I$  en utilisant un changement de variables.

**Exercice 3.**

On définit

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

A l'aide d'un changement de variables, calculer

$$\iiint_K \frac{z}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy dz.$$

**Exercice 4.**

- 1 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique  $|\cos x|$
- 2 Enoncer le théorème de Parseval et le théorème de Dirichlet.
- 3 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{4k^2 - 1}, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}.$$

FIN