ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013-2014
CPBX PC Ecole Semestre 4 - UE N1CP402D
Examen d'Analyse : Epreuve de A. Bachelot.
Date : Mardi 27 mai 2014 **Heure :** 11h.-12h30.
Durée : 1h30
Lieu : bâtiment A22, amphithéâtre Poincaré.
- Sans document -

Collège Sciences et technologie

Exercice 1.

On pose pour $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_{]0,\infty[} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt.$$

1. Montrer que $F(x)$ est bien définie.
2. Montrer que pour tout $a > 0$, $F \in C^0([0, a])$.
3. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $F \in C^1([\alpha, \infty[$.
4. Calculer $F'(x)$. En déduire $F(x)$ (on rappelle que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2)$.

Exercice 2.

Soit K la partie du demi plan $y > 0$ délimitée par les courbes $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = 2x + 1$, $y^2 = 9 - 6x$, $y^2 = 4 - 4x$.
1. Représentez graphiquement K.
2. Calculer l'intégrale

$$\iint_K \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy.$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ dont on justifiera l'emploi.

Exercice 3.

Etant donnés trois réels strictement positifs a, b, c, on définit

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z,\ 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 4 \right\}.$$

Calculer

$$\iiint_K x^2 + y^2 + z^2 dxdydz.$$

Exercice 4.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $|\sin t\,|$.
2. Enoncer le théorème de Parseval et le théorème de Dirichlet.
3. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1},\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1},\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}.$$

FIN