	ANNEE UNIVERSITAIRE 2010/2011 SESSION 1 DE PRINTEMPS **Parcours : CPBX, PC écoles** **Epreuve : Analyse 2** **Code UE : CPI 426** **Date : mardi 24 Mai 2011** **Heure : 8h30** **Durée : 1h30** **Lieu : A22, Amphithéâtre Wegener** Documents : Non autorisés. Epreuve de : **A. Bachelot**	
DISVE Pôle Licence		

Exercice 1.

1 Montrer que l'intégrale

$$\int_2^\infty \frac{\sin t}{\ln t} dt$$

est convergente.

□

$$\int_2^b \frac{\sin t}{\ln t} dt = -\frac{\cos b}{\ln b} + \frac{\cos 2}{\ln 2} - \int_2^b \frac{\cos t}{t(\ln t)^2} dt$$

$$\int_2^b \left| \frac{\cos t}{t(\ln t)^2} \right| dt \leq \int_2^b \frac{1}{t(\ln t)^2} dt = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{x^2} dx \leq \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty$$

2 Montrer que cette intégrale n'est pas absolument convergente.

□

comme pour $\dfrac{\sin t}{t}$

■

Exercice 2. Etant donné $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

1 Montrer que $f(x)$ est bien défini.

□

$\left| \dfrac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \right| \leq \mid x \mid e^{-t}$ qui est t-intégrable sur $]0, \infty[$.

■

2 Enoncer le théorème de dérivation de Lebesgue d'une intégrale à paramètre. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et calculer $f'(x)$.

□

$$\left| \partial_x \left(\frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \right) \right| = \left| \cos(xt) e^{-t} \right| \leq e^{-t}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

■

3 En déduire la valeur de $f(x)$.

□

$f(0) = 0$ donc $f(x) = \arctan x$.
■

Exercice 3.
A l'aide d'un changement de variables, calculer

$$\iint_D (y-x)dxdy, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ -3 \leq y - x \leq 1, \ \ \frac{7}{3} \leq y + \frac{x}{3} \leq 5\right\}$$

□
$u = y - x$, $v = y + x/3$, $dudv = 4/3dxdy$, $I = -8$
■

Exercice 4.
Etant donnés trois réels strictement positifs a, b, c, on définit

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x, \ 0 \leq y, \ 0 \leq z, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

Calculer

$$\iiint_K xyzdxdydz.$$

□
$x = ar\cos(\varphi)\sin(\theta)$ $y = br\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = cr\cos(\theta)$, $I = a^2b^2c^2/48$.
■

Exercice 5.
1 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $\mathbb{R}$, dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est donnée par $f(x) = x^2$.
□
$c_n = \dfrac{2(-1)^n}{n^2}$
■
2 Enoncer le théorème de Parseval et le théorème de Dirichlet.
3 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

□ théorème de Dirichlet en $x = 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\pi^2/12$, et en $x = \pi$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.
Théorème de Parseval : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \pi^4/90$.
■

FIN