DISVE Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2010/2011** SESSION 2 D'AUTOMNE **Parcours : MHT** **UE : MHT522** **Épreuve : Calcul intégral** **Date : 6 juin 2011** **Heure : 14 h** **Durée : 3 h** Documents : Non autorisés Calculatrice : Non autorisée Épreuve de V. Bruneau	

Dans tout le sujet, μ désigne la mesure de Lebesgue.

Question de cours 1 : Enoncer le théorème donnant la continuité d'une intégrale à paramètre.

Exercice 1. Soit T le triangle de $I\!R^2$, de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. En justifiant tous les calculs, calculer

$$\int_T (x+y^2)y \, d\mu(x,y).$$

Exercice 2. Soit $f : I\!R^+ \longrightarrow I\!R$, mesurable, bornée sur $I\!R^+$.

a. Montrer que pour tout $t > 0$, $x \mapsto \frac{1}{1+t^2x^2} f(x)$ est intégrable sur $I\!R^+$.

Pour $t > 0$, on définit alors

$$F(t) = \int_{I\!R^+} \frac{1}{1+t^2x^2} f(x) d\mu(x).$$

b. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

c. Donner un exemple de fonction f pour laquelle F serait continue en 0. Justifier.

d. Donner un exemple de fonction f pour laquelle F ne serait pas continue en 0. Justifier.

Exercice 3. Soient $f \in L^p(I\!R^n)$ et $g \in L^q(I\!R^n)$, $1 \leq p \leq q$.

a. Soit f une fonction mesurable positive sur $I\!R^n$. Montrer que pour tout $t \in [0,1)$, et $1 \leq p \leq q$,

$$\int_{I\!R^n} f(x)^{(1-t)p+tq} dx \leq \Big(\int_{I\!R^n} f^p(x) dx \Big)^{1-t} \Big(\int_{I\!R^n} f^q(x) dx \Big)^{t}.$$

(Indication : on pourra appliquer l'inégalité de Hölder en introduisant (p', q') définis par $\frac{1}{p'} = 1 - t$ et $\frac{1}{q'} = t$)

b. En déduire que pour tout $r \in [p,q]$, $L^p \cap L^q \subset L^r$.

Exercice 4.
Soit $\mathcal{S}(I\!\!R)$, l'espace des fonctions à décroissance rapide sur $I\!\!R$:

$$\mathcal{S}(I\!\!R) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(I\!\!R),\, \forall \alpha \in I\!\!N,\, \forall \beta \in I\!\!N,\, x \mapsto x^\alpha \frac{d^\beta u}{dx^\beta}(x) \text{ est bornée sur } I\!\!R\}.$$

Pour $f \in \mathcal{S}$, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I\!\!R} e^{-i\,x\,\xi} f(x) d\mu(x).$$

a. Pourquoi la transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}(I\!\!R)$ est bien définie ? A quel espace appartient la transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}(I\!\!R)$?

b. Pour $u \in \mathcal{S}(I\!\!R)$ montrer que

$$\| u - u'' \|_{L^2}^2 = \int_{I\!\!R} (1+\xi^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \| u \|_{L^2}^2 + \| u'' \|_{L^2}^2 .$$

c. Pour $u \in \mathcal{S}(I\!\!R)$ exprimer $\| u' \|_{L^2}$ en fonction de $\hat{u}$ et montrer que

$$\| u' \|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}(\| u \|_{L^2}^2 + \| u'' \|_{L^2}^2).$$

d. Pour $u \in \mathcal{S}(I\!\!R)$ montrer qu'il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que

$$c \| u - u'' \|_{L^2} \leq \| u + u' - u'' \|_{L^2} \leq C \| u - u'' \|_{L^2} .$$

FIN