UNIVERSITÉ BORDEAUX 1
Sciences Technologies

SECONDE EDITION

JUIN 2010

MSI 101

EXERCICES POUR LE COURS INTEGRE

Nous vous souhaitons la bienvenue à l'Université Bordeaux 1 et la réussite dans vos études. Pour favoriser votre insertion à l'Université nous vous proposons ce fascicule d'exercices qui couvre le programme actuel de MSI 101. Il se veut un instrument de travail, tant dans le cadre des exercices résolus en cours que dans celui de votre travail personnel. Il y a beaucoup plus d'exercices que ce que l'on peut raisonnablement traiter pendant les travaux dirigés, ceci est volontaire et nous vous encourageons à travailler des exercices de ce polycopié qui n'ont pas été vus en cours.

Les modalités de contrôle des connaissances en MSI 101 s'articulent suivant :

- deux devoirs surveillés de 1h30 (coefficient 0.20 chacun)
- un devoir surveillé terminal de 3h (coefficient 0.40)
- deux devoirs à remettre (coefficient 0.10)
- des tests aléatoires durant les séances de cours intégrés (coefficient 0.10)

Pour vous guider dans votre travail, un contrat pédagogique a été mis en ligne sur ULYSSE. Chaque semaine vous y trouverez un nouveau guide contenant des exercices avec des corrections détaillées ou des solutions dans le cas d'exercices calculatoires. Vous pouvez travailler sur ces guides soit à l'espace Alpha soit de l'extérieur de l'Université si vous avez une connexion à internet. Ce contrat nous permet aussi de vous transmettre des informations sur le MSI 101. Cinq séances de tutorat intégré sont prévues dans votre emploi du temps pour travailler sur ce contrat. Ces séances sont encadrées par un tuteur. Le rôle du tuteur est de répondre aux questions que vous vous posez en travaillant sur ces guides. Le tuteur peut aussi vous aider sur d'autres exercices de mathématiques.

L'Université Bordeaux 1 met à votre disposition des services de tutorat gratuit : le kiosque et le tutorat d'accompagnement personnalisé. Ces tutorats sont effectués par des étudiants de master ou doctorants en mathématiques. Le kiosque fonctionne tous les jours du lundi au vendredi entre 12h30 et 13h30 dans le hall du bâtiment A. 22. Le tuteur qui assure la permanence peut, soit vous aider sur une question de mathématiques, si cette question est simple, soit vous proposer un rendez-vous avec un tuteur pour travailler sur votre problème : c'est le tutorat d'accompagnement personnalisé. Nous vous invitons fortement à profiter de cette aide gratuite qui vous est proposée.

L'équipe pédagogique de MSI101

Le 10 juillet 2010

COMMENT S'INCRIRE AU CONTRAT PEDAGOGIQUE MSI 101.

Avant de s'inscrire il est nécessaire d'avoir « valider ses comptes », ceci peut se faire soit à l'espace alpha soit dans les salles informatiques.

Pour s'inscrire au contrat MSI 101, aller sur le site de l'université (http://www.u-bordeaux1.fr/) :

- Cliquer sur le lien ***Accès ENT*** qui se trouve en bas à droite.
- Cliquer ensuite sur le lien ***s'identifier*** qui se trouve en haut à droite.
- Entrer votre *identifian*t et votre *mot de passe* puis cliquer sur *connexion*.
- Cliquer sur l'onglet ***Espace de formations***
- Cliquer sur le logo ***ULYSSE***
- Cliquer ensuite sur le bouton de la boussole ***Contrats Pédagogiques***
- Développer l'arbre pédagogique en cliquant successivement sur les ***« + »*** devant les valises :

  - Formation initiale à l'Université Bordeaux 1

  - Cycle Licence

  -Tronc commun MISMI

  -MSI 101/ Mathématiques
- Cliquer ensuite sur ***« la flèche »*** qui se trouve en bout de la ligne
- Cliquer ensuite sur le bouton ***«s'inscrire »***.

À partir de là vous êtes inscrit au contrat MSI 101. Lorsque vous allez sur la page d'accueil d'ULYSSE votre contrat est sélectionné dans le bandeau se trouvant à droite, en cliquant sur le lien, vous accéderez directement au contrat MSI 101.

Le contrat est constitué de guides. Ces guides contiennent des exercices corrigés qui suivent la progression de votre cours.
En cas de difficulté pour vous s'inscrire, vous pouvez demander de l'aide à l'accueil de l'espace Alpha.

Table des matières

Chapitre 1

Bases de logique et théorie des ensembles

Des exercices sur les tables de vérité, les démonstrations par contraposée, par l'absurde et par récurrence ont été faits, en principe, dans le cadre de l'UE de méthodologie

A - Ensembles

Exercice 1.

1. Soient $A = \{2,3,4,5\}$ et $B = \{4,5,6\}$. Déterminer :

$$A \cap B \quad , \quad A \cup B \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} B \quad , \quad \complement_{A \cup B} A$$

2. Soient les intervalles (de $\mathbb{R}$) $I = [1,3]$ et $J = [2,4]$. Déterminer :

$$I \cap J \quad , \quad I \cup J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} I \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}}(I \cup J).$$

Exercice 2.

1. Soit A une partie d'un ensemble E. Déterminer $\complement_E \left(\complement_E A\right)$ et $A \cup \complement_E A$.
2. Montrer que si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on a

$$\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B \quad \text{et} \quad \complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B.$$

3. Montrer que :

$$A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A.$$

Exercice 3.
Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$.
Montrer que l'on a l'inclusion $B \subset C$.

Exercice 4.
Soient E un ensemble, et F, G deux parties de E. Montrer

$$\begin{array}{lcl} F \subset G & \Longleftrightarrow & F \cup G = G \\ F \subset G & \Longleftrightarrow & \complement_E F \cup G = E \end{array}$$

Exercice 5. (Examen janvier 2007)
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$E \setminus (A \cap B) \;=\; (E \setminus A) \;\cup\; (E \setminus B)$$

Exercice 6. (DM1 2007)
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$A \cup B \cup C \;=\; (A \setminus B) \;\cup\; (B \setminus C) \;\cup\; (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$$

B - Applications

B - 1 Images, antécédents

Exercice 7.
Soit f_1 définie par :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

1 Déterminer les images de 0, 1, -2, $\sqrt{2}$.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, 1, -2, $\sqrt{2}$.

Exercice 8.
Pour l'application f_2 définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x - 3y, -4x + 6y) \end{array}$$

1 Déterminer les images de $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, -2)$.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, -2)$.

Exercice 9.
Pour l'application f_3 définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y \end{array}$$

1 Déterminer les images de $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, 1.

Exercice 10.
Pour l'application f_4 définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x^2, x + 5) \end{array}$$

1 Déterminer les images de 0, 1, -1.
2 Déterminer, s'ils existent, les antécédents de $(0, 0)$ $(-1, 0)$, $(1, 6)$.

Exercice 11.
Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on définit l'application χ_A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \chi_A(x) & = & 1 \quad \text{si } x \in A \\ \chi_A(x) & = & 0 \quad \text{si } x \notin A \end{array} \right.$$

Dessiner le graphe de la fonction χ_A lorsque A est la partie de $\mathbb{R}$: $A = [1; 2[\cup \{3\}$.

B - 2 Image directe et image réciproque

Exercice 12.
On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.
1 Déterminer les images directes :

$$f(\{-1,2\}) \quad ; \quad f([-3,-1]) \quad ; \quad f([-3,1]).$$

2 Déterminer les images réciproques :

$$f^{-1}(\{4\}) \quad ; \quad f^{-1}(\{-1\}) \quad ; \quad f^{-1}([-1,4]).$$

Exercice 13.
Pour l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(\pi x) \end{array}$$

calculer les images directes :

$$f(\{0,1\}), \quad f([0,1/2]), \quad f(\mathbb{Z}), \quad f(2\mathbb{Z}),$$

où $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs.

Exercice 14.
On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2+y^2. \end{array}$$

1 Calculer les images réciproques :

$$f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}(]-\infty,0]), \quad f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}(]-1,1]), \quad f^{-1}(]4,+\infty[).$$

2 Calculer les images directes :
a $f(X_1)$ où $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x > 0\}$.
b $f(C)$ où $C = [0,1] \times [-2,3]$.

B - 3 Composition des applications

Exercice 15.
On considère les applications f et g suivantes :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Les expressions $f \circ g$ et $g \circ f$ ont-elles un sens ? Si oui les expliciter.

Exercice 16.
Mêmes questions avec f et g définies par :

$$\begin{array}{rccl} f : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln x \end{array}$$

B - 4 Injection, surjection, bijection

Exercice 17.
On considère les deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{c, d, e\}$.
Déterminer toutes les applications de E dans F et dire, pour chacune d'entre elles, si elle est injective, surjective, bijective.

Exercice 18.
On considère les applications f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 7x-1 \end{array}$$

1 Montrer que f et g sont bijectives.
2 Déterminer f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $(f \circ g)^{-1}$ et $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exercice 19.
L'application $h : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 3n \end{cases}$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 20.
On considère les applications f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x, x^2) \end{array}$$

1 Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
2 Les applications f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 21.
Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Montrer que :

$$f \text{ et } g \text{ surjectives } \Longrightarrow g \circ f \text{surjective ,}$$

$$f \text{ et } g \text{ injectives } \Longrightarrow g \circ f \text{injective.}$$

Exercice 22.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f_{a,b}$ l'application

$$f_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b. \end{array}$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de (a, b) la fonction $f_{a,b}$ est injective, pour quelles valeurs elle est surjective.
2. Montrer que si $f_{a,b} = f_{c,d}$, alors $a = c$ et $b = d$.
3. *facultatif :* Interpréter la dernière condition en terme d'injectivité d'une certaine application.
4. Lorsque $f_{a,b}$ est bijective, déterminer son inverse.

Exercice 23.
Dire si les applications f de E dans F suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Dans le cas où l'application est bijective, déterminer son application réciproque.
1 $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $\quad f : (x, y) \mapsto x + y$.

2 $E = F = \mathbb{R}^2$, $\qquad f:\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.
3 $E = F = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\qquad f:\ A \mapsto \complement_{\mathbb{N}} A$.

Exercice 24.
On considère l'application f définie par

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x(1-x). \end{array}$$

1. Calculer $f^{-1}(\{y\})$ pour tout réel y. Pourquoi la valeur $y = 1/4$ est-elle particulière ? Est-ce que f est injective ? Surjective ?
2. Trouver deux intervalles I et J, aussi grands que possibles, tels que l'application $I \to J$ donnée par "la même formule" que f soit une bijection.

Exercice 25.
Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f(n) = 2n, \qquad g(n) = E\left[\frac{n}{2}\right]$$

où $E[x]$ est la partie entière de x, c'est-à-dire $E[x] \in \mathbb{N}$ et $E[x] \leq x < E[x] + 1$.

1 Les applications f et g sont-elles bijectives ?
2 Calculer $g \circ f$ puis $f \circ g$. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bijectives ?

Exercice 26.
Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G .
1 On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective.
2 On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective.
3 On suppose que $g \circ f$ et g sont bijectives, f est-elle bijective ?

C - Autres exercices

Exercice 27.
Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.
1 **a** Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))$$

b Montrer que si f est injectif, on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$$

c Donner un exemple d'application f telle que :

$$\exists A \in \mathcal{P}(E),\ A \neq f^{-1}(f(A))$$

2 **a** Montrer que :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$$

b Montrer que si f est surjectif, on a :

$$\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f\left(f^{-1}(B)\right) = B$$

c Donner un exemple d'application f telle que :

$$\exists B \in \mathcal{P}(F),\ f\left(f^{-1}(B)\right) \neq B$$

Chapitre 2

Nombres entiers - Dénombrement - Initiation à l'arithmétique - Nombres rationnels

A - Raisonnement par récurrence

Exercice 1.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 2.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, c'est-à-dire telle que : $n < p \Rightarrow \varphi(n) < \varphi(p)$.
Montrer par récurrence que l'on a :

$$\varphi(n) \geq \varphi(0) + n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 3.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3,$$

et en déduire la valeur de cette dernière somme.

B - Dénombrement

Exercice 4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Expliciter $\mathcal{P}(E_n)$ pour $n = 1$, 2 et 3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{Card}\ \mathcal{P}(E_n) = 2^n$.

Exercice 5.
Soit x un réel et soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^n$.

1 Développer $f(x)$.
2 En déduire, si k et n sont deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$, les deux égalités :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$.

Exercice 6. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$:
1 Soit $n \geq p \geq 1$. Montrer que

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.
2 Retrouver ce résultat en dérivant $f(x) = (1+x)^n$.

Exercice 7.
1 On doit ranger dans p tiroirs ($p \geq 1$), n boules blanches indiscernables ($n \geq 0$). Chaque tiroir peut recevoir entre 0 et n boules.

Démontrer que le nombre de rangements possibles est égal à $\displaystyle\binom{n+p-1}{p-1}$.
2 Soit $n \geq 0$ un entier. Quel est le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ qui vérifient

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$$

C - Division euclidienne et PGCD

C - 1 Algorithme d'Euclide

Exercice 8. Lemme de Gauss
Soient trois entiers relatifs a, b, c. On suppose que a et b sont premiers entre eux, et que a divise le produit bc. Montrer qu'alors a divise c.

Exercice 9.
1 Sachant que $6471 = 123 \times 52 + 75$, déterminer, sans faire la division, le quotient et le reste de la division euclidienne du nombre 6471 par chacun des nombres 123 et 52.
2 Déterminer par l'algorithme d'Euclide $\mathrm{PGCD}(585, 247)$ et $\mathrm{PGCD}(2006, 1789)$.

Exercice 10. **1** Déterminer le PGCD de 357 et 252.
2 Déterminer les couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de $357x + 252y = 0$.
3 Pour chacune des équations suivantes, déterminer, quand cela est possible, un couple (x, y) d'entiers relatifs qui en est solution :

$$\begin{aligned} 357x + 252y &= 21 \\ 357x + 252y &= 24 \end{aligned}$$

C - 2 Exercices théoriques

Exercice 11.
Soit n un élément de $\mathbb{Z}$ et a et b deux élément de $\mathbb{N}^*$. Soient q le quotient dans la division euclidienne de n par a et q' celui de q par b.
Montrer que q' est aussi le quotient de n par le produit ab.

Exercice 12.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $2n^2 + 2n$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux, c'est-à-dire que leur pgcd est 1.

Exercice 13.
Déterminer les entiers n appartenant à $\mathbb{N}$ tels que $\text{PGCD}(3n+1, 2n) = 1$.

D - Rationnels

Exercice 14. *Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*
Supposons qu'il existe deux entiers naturels tels que $p^2 = 2q^2$.
1 Montrer qu'on peut supposer que p et q sont premiers entre eux.
2 Montrer que p est pair.
3 En déduire que q est pair.
4 En déduire que p et q n'existent pas.

E - Exercices variés

Exercice 15.
Les nombres a, b, c étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.
1 S'il existe u et v des entiers tels que $au + bv = 1$, alors $\text{PGCD}(a, b) = 1$.
2 S'il existe u et v des entiers tels que $au + bv = c$, alors $\text{PGCD}(a, b) = c$.
3 Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
4 Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.

Exercice 16. (Extrait de DS)
Montrer que l'application f de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$f(x, y) = 15x - 8y$$

est une application surjective.
Décrire l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$.
L'application f est-elle injective ?

Exercice 17.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note $m\mathbb{Z}$ la partie de $\mathbb{Z}$ suivante :

$$m\mathbb{Z} = \{mk\, ,\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que l'on a $10\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 30\mathbb{Z}$.

Chapitre 3

Nombres réels et propriétés de $\mathbb{R}$

A - Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes :

$$a)\ \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = 0 \qquad b)\ (x^2 - 1)^2 > 1 \qquad c)\ \cos(2x) = -\frac{1}{2} \qquad d)\ 2 < |3x + 2| \leq 5.$$

B - Borne supérieure et inférieure

Exercice 2.
Pour chacun des ensembles A, B, C suivants

$$A = \{0, 2, 3, 4\}, \qquad B = [0, 2], \qquad C =]0, 1], \qquad D =]-2, 3] \cup [4, 5[.$$

dire
- S'ils sont majorés ou minorés.
- S'ils ont un plus grand ou un plus petit élément. Si oui, les préciser.
- S'ils ont une borne supérieure ou une borne inférieure. Si oui, les préciser.

Exercice 3.
Soit l'application f de $E =]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que : $A = f(E)$ est un ensemble borné et que : $\sup(A) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4.
Etudier l'existence des bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants. Les déterminer si elles existent et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$\begin{aligned} A &= \{y \in \mathbb{R} \colon \exists x \in]1, 3],\ y = \frac{1}{x}\}, \\ B &= \{z \in \mathbb{R} \colon \exists n \in \mathbb{N},\ z = n^2 + 1\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \colon \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x = 1 - \frac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

Exercice 5.
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in A \times B,\ x \leq y$$

Montrer que A admet une borne supérieure (notée $\sup A$), que B admet une borne inférieure (notée $\inf B$), et que l'on a : $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 6.
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides, minorées et majorées.

1. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que :

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

2. Montrer que $A \cup B$ admet une borne inférieure et que :

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$$

Exercice 7.
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides, minorées et majorées. Montrer que si $A \cap B$ est non vide, cet ensemble admet une borne supérieure et une borne inférieure et que l'on a les inégalités :

$$\max\{\inf(A), \inf(B)\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Donner un exemple où les inégalités sont strictes.

C - Densité des rationnels et des irrationnels

Exercice 8.
Soient deux réels x et y tels que $x < y$.
1 On considère q un entier strictement supérieur à $\dfrac{1}{y-x}$ et soit p le plus petit entier strictement supérieur à xq.
a Justifier l'existence de p et de q.
b Montrer que $\dfrac{p}{q} \in]x, y[$
2 **a** Montrer que l'intervalle $]x+\sqrt{2}, y+\sqrt{2}[$ contient un rationnel. On note r un tel rationnel.
b En déduire que $]x, y[$ contient un irrationnel.

Chapitre 4

Nombres complexes

A - Ecriture algébrique et trigonométrique

Exercice 1.
Ecrire sous la forme $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les nombres complexes suivants :
1 $\forall n \in \mathbb{N} \quad i^n$ **2** $\dfrac{1+2i}{2+i}$ **3** $(2+3i)^3$ **4** $\dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$

Exercice 2.
Module et argument des nombres complexes suivants :

1 $1 + i\sqrt{3}$ **2** $-\sqrt{6} + i\sqrt{2}$ **3** $(1-i)(\sqrt{3}-i)(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$ **4** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$

Exercice 3.
Déterminer les entiers naturels n tels que $(1 - i\sqrt{3})^n$ soit
1 imaginaire pur, **2** réel négatif.

Exercice 4.
Donner l'écriture cartésienne et l'écriture trigonométrique de $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}$.

En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 5.
1 Exprimer $\cos\theta$ à l'aide de $e^{i\theta}$ et de $e^{-i\theta}$.
2 Calculer $\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3 En regroupant les termes de la forme $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$, trouver une expression de $\cos^5\theta$ en fonction des cosinus et des sinus de multiples de θ.

Exercice 6.
1 Exprimer $e^{5i\theta}$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.
2 En déduire une expression de $\cos 5\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

Exercice 7.
1 Soit x un nombre réel appartenant à $]-\pi, \pi]$. Déterminer le module et l'argument de $1 + e^{ix}$ (mettre $e^{i\frac{x}{2}}$ en facteur).

Exercice 8. Soient $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos kx$ et $S' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin kx$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Donner une écriture trigonométrique de $S + iS'$. En déduire une autre écriture de S et de S'.

B - Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

B - 1 Racines $n^{ièmes}$ de l'unité

Exercice 9.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations **1** $z^3 = 8i$ **2** $4z^4 = -i$ **3** $(z+1)^4 = -16$

Exercice 10.
1 Déterminer les racines cubiques de l'unité (i.e. les complexes z tels que $z^3 = 1$). On donnera leur forme algébrique et leur forme géométrique.
2 Soient j et j' les deux racines non réelles de cette équation. Montrer que

$$j' = j^2 = \bar{j}, \qquad 1 + j + j^2 = 0$$

Exercice 11. Cas particulier des racines carrées
Résoudre dans $\mathbb{C}$:
1 $z^2 = -3$ **2** $z^2 = 2i$ **3** $z^2 = 1 + i$
4 $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$ **5** $z^2 = 3 - 4i$.(On pourra chercher z sous la forme $a + ib$).

B - 2 Equation du second degré

Exercice 12.
Résoudre dans $\mathbb{C}$:
1 $z^2 - 5iz - 7 + i = 0$ **2** $z^2 + 2iz\sqrt{2} - 2(1+i) = 0$.

Exercice 13.
Résoudre dans $\mathbb{C}$:
1 $z^2 + z + 1 = 0$ **2** $z^2 + 2z + 5 = 0$

B - 3 Equation de degré supérieur ou égal à 3

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
1

$$z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.
2

$$z^4 + (-4 + 3i)z^2 + 7 - i = 0$$

C - Autres exercices

Exercice 15. (juin 2005)
1 Soit $z \neq 0$ un nombre complexe non nul. Expliciter en fonction des coordonnées de z l'écriture cartésienne et l'écriture tigonométrique de $\frac{z}{\bar{z}}$.
2 Montrer que l'application f de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \xmapsto{f} \frac{z}{\bar{z}}$$

a pour image le cercle unité $S = \{w \in \mathbb{C},\ |w| = 1\}$.
3 Montrer que f n'est pas injective. Calculer l'ensemble des antécédents par f de $1 \in S$ et de

$i \in S$.
4 Calculer les antécédents par f de $\dfrac{3+4i}{5}$.

Exercice 16. (DS 2004-2005)
1 Combien l'équation $z^5 = 1$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{C}$?
Donner sous la forme trigonométrique (ou polaire) toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1$ dans le corps des nombres complexes.
2 Soit z une solution de l'équation $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$; montrer que $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.
3 Soit z une solution de l'équation $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$; montrer que si $z \neq 1$, on a

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

puis en déduire

$$z^2 + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1 = 0$$

4 Si $z = e^{i\theta}$, vérifier que : $z^2 + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1 = 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1$.
En déduire que le nombre $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$ s'écrit $x + y\sqrt{5}$ où x et y sont deux nombres rationnels que l'on calculera.

Chapitre 5

Suites réelles

A - Définition de limite

Exercice 1.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier n strictement positif, par :

$$u_n = \ln(n+2) - \ln(n)$$

1. Trouver un entier n_0 tel que : $\quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < 10^{-3}$.
2. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ en utilisant la définition.

Exercice 2.
Montrer que la suite $u_n = \dfrac{3n+1}{2n+2}$ converge vers 3/2 en utilisant la définition de la convergence.

B - Calcul de limite

Exercice 3.
Etudier la convergence et déterminer la limite, lorsqu'elle existe, quand n tend vers $+\infty$, des suites dont le terme général est donné pour $n > 0$ par :

1 $\quad u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ $\qquad$ **2** $\quad v_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $a > 0$, $b > 0$

3 $\quad w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad$ **4** $\quad x_n = \dfrac{\cos n}{n}$

C - Propriétés des suites convergentes

Exercice 4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} + \cos(n\pi)$$

Montrer que (u_{2n}) est convergente.
La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 5.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ par :

$$v_n := u_{2n}, \qquad w_n := u_{2n+1}$$

1 On suppose que les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.
2 Application : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

a Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes.
b En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

1 Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.
2 La somme de deux suites divergentes est divergente.
3 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est monotone.
4 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors elle est non bornée.
5 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors elle est convergente.

D - Etude de suites

Exercice 7.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{(-1)^n}{5^n}$$

est convergente et calculer sa limite que l'on notera l.

Exercice 8.
On considère la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases}$$

1 Montrer qu'elle est croissante et majorée. Que peut-on en conclure ?
2 Montrer qu'elle converge vers 3.

Exercice 9.
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant

$$u_1 = 1, \qquad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n}$$

1 Montrer que cette suite est croissante.

2 On suppose qu'elle admet une limite notée l.
a Montrer que la suite de terme général

$$v_n := u_{2n} - u_n$$

est convergente. Quelle est sa limite ?
b Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $v_n \geq \frac{1}{2}$.
c Qu'en déduire pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ?
4 Que peut-on dire quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 10.
On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
(*Pour $k \geq 2$ on pourra utiliser :* $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.)

Exercice 11.
Pour $n \geq 1$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.
1 Montrer l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n\frac{n}{n^2+n} \ \leq \ S_n \ \leq \ n\frac{n}{n^2+1}$$

2 En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 12.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

Montrer que cette suite converge.
(*On pourra montrer que :* $\forall k \in \mathbb{N}^*, k! \geq 2^{k-1}$.)

Exercice 13.
On considère la suite u_n définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$, et déterminer le sens de variation.

Exercice 14.
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_0 = b, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

1 Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont définies.
2 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation $a_n \leq b_n$.
3 En déduire que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont monotones.
4 Démontrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et ont la même limite.

Chapitre 6

Fonctions numériques

A - Généralités sur les fonctions

Exercice 1.
Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\ ;\quad g(x) = \sqrt{x^2-2\,x-5}\ ;\quad h(x) = \ln(4\,x+3)$$

B - Limite

B - 1 Définition de limite

Exercice 2.
1 Montrer en utilisant des quantificateurs que :

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

2 Quelle est la limite l quand x tend vers $+\infty$ de la fonction

$$f\,:\ x \mapsto \frac{x}{x+1}$$

Pour tout réel strictement positif ε, déterminer A tel que :

$$(x \geq A) \Longrightarrow (|f(x)-l| \leq \varepsilon)$$

3 Ecrire en utilisant des quantificateurs :

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$$

Déterminer un intervalle J centré en 0 tel que :

$$(x \in J) \Longrightarrow \big(|\ln(1+x)| \leq 10^{-3}\big)$$

4 En utilisant des suites, montrer que la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 3.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f est périodique de période $p > 0$ (c'est-à-dire $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$) et admet une limite (finie) quand x tend vers $+\infty$.
Montrer que f est une fonction constante.

B - 2 Calcul de limite

Exercice 4.
Déterminer les limites quand elles existent des fonctions suivantes dans les conditions indiquées :

1 $\dfrac{3x^3 + 7x^2 + 2x}{x^3 - 4x}$ en $+\infty$, $-\infty$, 0, 2, -2.

2 $\dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{2x - \sqrt{4x^2+1}}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

C - Continuité

C - 1 Définition de continuité

Exercice 5.
La fonction f définie par

$$f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ si } x \neq 0$$

admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 6.
On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \alpha & \text{si} \quad x = 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Existe-t-il des réels a, b, α pour lesquels f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.
On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad |\, x \,| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad |\, x \,| \geq 1 \end{cases}$$

Existe-t-il des réels a, b, c pour lesquels f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8.
Soit $E(x)$ la partie entière de x. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{x - E(x)}, \qquad g : x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

Etudier leur continuité.

Exercice 9.
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $g(0) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$.

Exercice 10. (Extrait de DS $2004 - 2005$)
Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = g(x)$$

Montrer que $f = g$.

C - 2 Propriétés des fonctions continues

Exercice 11.
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 = 7, \qquad \text{et } u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.
Mêmes questions si $u_0 = 1$.

Exercice 12.
Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$, $a < b$. Montrer que si l'image de f est une partie finie de $\mathbb{R}$, alors f est constante.

Exercice 13.
1 Montrer que l'équation $x^7 + 9x^5 - 8 = 0$ admet au moins une solution entre 0 et 1.
2 Montrer que toute fonction polynôme réelle de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 14.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1 Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
2 Déduire des propriétés de f celles de f^{-1}.
3 Déterminer explicitement f^{-1}.

Exercice 15.
1 Soit $f : [a, b] \to [a, b]$.
Montrer que si f est continue sur $[a, b]$, il existe un réel c de $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.
(*Considérer la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$, puis $g(a)$ et $g(b)$.*)
2 Application : montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une solution comprise entre 0 et 1.

Exercice 16.
Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[0, +\infty[$ admettant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

D - Dérivabilité

D - 1 Définition de la dérivée en un point

Exercice 17.
La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto |x-1|$$

est-elle continue aux points 0,1 et 2 ? Est-elle dérivable en ces points ?

Exercice 18.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x > 0, \\ 1 - \sin(x)^2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que f est dérivable en 0, et déterminer $f'(0)$.
4. Vérifier que
$$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0),$$
et donc que f' est également continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$
soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 20.
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f\,:\, x \mapsto \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ mx + n & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
m et n étant deux nombres réels.
a Déterminer l'ensemble $C = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 / f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\}$.
b Déterminer l'ensemble $D = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 / f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\}$.
c Pour $(m, n) \in D$, calculer la fonction dérivée f' et étudier sa continuité.

Exercice 21.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que
$$|f(x)| \leq x^2$$
pour tout x. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, avec $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ pour $x \neq 0$.
3. Montrer que f est dérivable en 0.
4. Expliquer pourquoi $\cos(1/x)$ n'admet pas de limite pour $x \to 0$, et en déduire que $f'(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to 0$.

D - 2 Calcul de dérivées

Exercice 22.
Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir indiqué sur quels intervalles elles sont dérivables :
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 12}, \qquad f(x) = \cos^3(x)\sin^2(x),$$
$$f(x) = \frac{3 - 5x^4}{x^3 - x^2 + x - 1} \qquad f(x) = (\tan x)^5$$

Exercice 23.
Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :
$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \ln x \quad ; \quad h(x) = e^{2x}.$$

Exercice 24.

1 Montrer que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est paire, sa dérivée est impaire.
2 Montrer que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est impaire, alors $f(0) = 0$ et la dérivée est paire.

D - 3 Calcul de limites

Exercice 25.
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1},$$

D - 4 Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 26.
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée f' continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

1 Montrer que pour tout réel x on a $|f'(x)| \geq 1$.
2 En déduire que f est strictement monotone.
3 Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
L'application réciproque est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

E - Etude de fonction

Exercice 27.
On considère la fonction $f$définie sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x\tan x}$$

1 Montrer que la fonction f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2 Soit g sa fonction réciproque. La fonction g est-elle continue sur J ? Est-elle dérivable sur J ?
3 Soit $b = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; montrer que g est dérivable en b et calculer $g'(b)$.

Exercice 28.
Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie dans $]0, +\infty[$ par

$$f(u) = \frac{a^2 + u^2}{2u}$$

1 Etudier f (tableau de variation, asymptotes éventuelles).
2 On note g la restriction de f à $I_1 = [a, +\infty[$.
Montrer que g possède une fonction réciproque. La déterminer.
3 On note h la restriction de f à $I_2 =]0, a]$.
Montrer que h possède une fonction réciproque. La déterminer.

Exercice 29.
Soient $n \geq 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :

$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n).$$

Chapitre 7

Fonctions numériques usuelles

A - Fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Exercice 1.
Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir indiqué sur quels intervalles elles sont dérivables :

$$f(x) = e^{\cos(\sin(x))}, \quad f(x) = \ln(\sin(x)), \quad f(x) = \ln(\ln(x)), \quad u(x) = (x^3+1)^{\frac{3}{2}} \quad ,$$
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x+1}, \quad f(x) = \exp(x^3 - 2x + 1), \quad f(x) = (a\cos\omega x \ + \ b\sin\omega x)e^{ax}$$

Exercice 2.
Déterminer les limites en $+\infty$, quand elles existent, des fonctions suivantes :

$$\sqrt{x} - x, \quad e^{\sqrt{x}-x}, \quad \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}, \quad \frac{x - 2\ln(x)}{e^x - 1}.$$

Exercice 3.
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{5}}-1}{x^4-1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{1+2\ln x}}$$

Exercice 4.
Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la suite u_n dont le terme général est donné pour $n > 0$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

B - Fonctions circulaires et leurs réciproques

Exercice 5.
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{Arctan} \frac{1}{x-1} \quad , \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Arccos} x - \frac{\pi}{3}}{4x^2-1} \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin x} - e^{\cos x}}{\cos 2x}$$

Exercice 6.

1 Calculer : $\text{Arcsin}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{Arccos}\,\dfrac{-1}{2}$; $\text{Arctan}\,\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$; $\text{Arcsin}\left(\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$\text{Arccos}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $\sin(\text{Arcsin}\,1)$; $\text{Arcsin}(\sin 1)$; $\tan(\text{Arctan}\,3)$; $\text{Arctan}(\tan 3)$.

Exercice 7.

Donner une autre expression mathématique de

$$\sin(\text{Arccos}\,x) \quad , \quad \cos(\text{Arcsin}\,x) \quad , \quad \tan(\text{Arcsin}\,x)$$

Exercice 8.

Etudier la fonction définie par : $f(x) = \text{Arcsin}(\sin x))$

Exercice 9.

Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\text{Arcsin}\,x + \text{Arccos}\,x = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 10.

1 Déterminer les domaines de définition, de dérivabilité, et les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) \quad , \quad h(x) = \text{Arctan}\left(x^2-1\right).$$

2 Simplifier, suivant les valeurs de x l'expression :

$$\text{Arctan}\,x + \text{Arctan}\,\frac{1}{x}$$

C - Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

cosh, sinh, tanh, Arccosh, Arcsinh, Arctanh se notent aussi respectivement ch, sh, th, Argch, Argsh, Argth.

Exercice 11.

Résoudre l'équation :

$$2\cosh x + 3\sinh x = 1$$

Exercice 12.

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(\cosh x) - x]$$

Exercice 13.

Calculer la dérivée de la fonction suivante, après avoir indiqué sur quels intervalles elle est dérivable :

$$f(x) = \frac{1-\cosh(x)}{2+\sinh(x)}$$

Exercice 14.

Montrer les égalités :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arcsinh}\,x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ et $\forall x \in [1,+\infty[$, $\text{Arccosh}\,x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

1 directement,

2 en utilisant les dérivées.

D - Etude de fonctions

Exercice 15.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1 Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2 Déterminer l'ensemble D des réels x tels que f soit dérivable en x.
Pour x appartenant à D, calculer $f'(x)$.

Exercice 16.
1 Quel est le domaine de définition de la fonction

$$f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$$

La fonction f admet-elle une limite à droite en 0 ? Donner le tableau de variations de f.
2 Résoudre l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.
3 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e, +\infty[$.
Montrer que g admet une fonction réciproque. Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et $\left(g^{-1}\right)'(\sqrt{2})$.

Exercice 17.
Etudier la fonction

$$x \mapsto \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$$

La comparer à la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$.

Exercice 18.
Soit

$$f(x) = \cos(\operatorname{Arctan}(2x+1))$$

1 Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier ses limites en $\pm\infty$. Calculer $f(-1)$.
2 Résoudre l'équation $f(x) = 1/\sqrt{2}$.
3 Montrer que la restriction de f à $[-1/2, +\infty[$ possède une fonction réciproque g.
4 Calculer $g'(\sqrt{2}/2)$.

Chapitre 8

Intégration, calcul de primitives

Ce chapitre propose de nombreux exercices, on n'en fera qu'un ou deux de chaque type. Un exercice pouvant être traité de différentes façon peut figurer dans plusieurs rubriques.

A - Exercices théoriques

Exercice 1.
1 Quels sont les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction g définie par

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2+\cos t} dt$$

Quelle est alors la dérivée de g ?
2 Montrer que la fonction f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}}$$

admet des primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Déterminer celle qui s'annule pour $x = 1$.

Exercice 2.
1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et impaire, et soit $T > 0$. Prouver que

$$\int_{-T}^{T} f(x)\, dx = 0$$

2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique de période T. Montrer

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(x)dx \;=\; \int_0^T f(x)dx$$

Indication : $\displaystyle\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T}$

Exercice 3.
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I contenant l'intervalle $[a, b]$.
1 Vérifier que lorsque le réel x appartient à cet intervalle, alors le réel $y = a+b-x$ appartient aussi à cet intervalle.
2 Montrer l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(a+b-x)\, dx$$

3 En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\, dx$.
Indication : utiliser, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, la relation $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}}$.

B - Intégration à « vue »

Calculer les intégrales ou primitives suivantes sur les intervalles où elles sont définies :

Exercice 4.

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx, \quad \int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx, \quad \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$$

Exercice 5. $f(x)$ de la forme $u'(x)u^n(x)$, $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, etc :

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx \quad \text{sur }]0,+\infty[, \qquad \int x^4(1+x^5)^5\,dx, \qquad \int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx, \qquad \int \tan(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,e^{-\frac{1}{x}}\,dx, \qquad \int \sin^3 t\cos t\,dt, \qquad \int \frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{4}{5}}}dx \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

Exercice 6. $f(x)$ de la forme précédente après une transformation :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{1+\tanh(x)}\,dx, \qquad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx, \qquad \int \cos^2 x\,dx$$

C - Intégration par parties

Exercice 7.
Calculer, en intégrant par parties,

$$\int x^2e^x\,dx, \quad \int_0^x e^t\cos t\,dt, \quad \int t^2\cos t\,dt, \quad \int x^2\ln x\,dx,$$

$$\int \cos^3 x\,dx, \quad \int_0^1 \operatorname{Arctan}(x)\,dx, \quad \int \ln t\,dt, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

Exercice 8.
Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$$

1. Calculer I_1 (*faire une intégration par parties*).
2. Montrer que pour tout $n > 0$, on a

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n.$$

Exercice 9.
On considère pour tout entier naturel n les intégrales I_n et J_n suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\,dx.$$

1 Montrer que les intégrales I_n et J_n sont égales.
2 Calculer I_0 et I_1.
3 Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
4 En déduire les valeurs de I_n et J_n.

Exercice 10.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx$$

1. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.
2. Calculer I_1, puis I_5.

D - Intégration par changement de variables

D - 1 Changement en sin, cos, cosh, sinh

Exercice 11.
1 En posant $x = \sin u$ calculer :

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

2 $x = \sinh u$

$$\int_0^{\sinh(1)} \sqrt{1+x^2}\, dx \quad ;$$

3 $x = \sin u$ ou $x = \cos u$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

D - 2 Changement affine

Exercice 12. Pour se ramener à une primitive connue :

1

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\, dx \quad ; \quad \int_{-1}^{1} \sqrt{4+x^2}\, dx \quad ; \quad \int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$$

2 Soit a un réel strictement positif. Calculer sur des intervalles à préciser :

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx \quad ; \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx \quad ; \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx \quad ; \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx$$

Exercice 13. Pour changer l'intervalle d'intégration :

Poser un changement de variable affine pour transformer l'intégrale suivante en intégrale sur $[0,1]$. Puis la calculer.

$$\int_2^5 \left[(x-2)^5 + x\right]\, dx$$

Exercice 14. Pour exploiter la périodicité, les symétries, la parité :

Poser $t = x - \pi$ pour calculer :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

E - Intégration des fractions rationnelles

E - 1 Fractions rationnelles

Exercice 15.

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx \quad ; \quad \int \frac{x^2}{1+x^2}dx \quad ; \quad \int \frac{2x}{x^2+4}dx \quad ; \quad \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx \quad ; \quad \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$$

Exercice 16.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx \quad ; \quad \int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx \quad ; \quad \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

Exercice 17.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x}{x^2+2x+5}dx \quad ; \quad \int \frac{1}{x^2+4} \quad ; \quad \int \frac{x+1}{x^2+4}dx$$

Exercice 18.
Déterminer sur l'intervalle $]1,+\infty[$ les primitives de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$$

Exercice 19.
Déterminer dans quels intervalles ouverts on peut calculer les primitives suivantes et les calculer :

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-2}dx \quad ; \quad \int \frac{x^2+6x+8}{x^2+4x+3}dx \quad ; \quad \int \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$$

E - 2 Expressions rationnelles en $\sin$ et $\cos$

Exercice 20. $f(x)dx$ invariant lors du changement x en $-x$: on peut poser $u = \cos x$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx \qquad , \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{3+\cos x}dx$$

Exercice 21. $f(x)dx$ invariant lors du changement x en $\pi - x$: on peut poser $u = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}\, dx$$

Exercice 22. $f(x)dx$ invariant lors du changement x en $\pi + x$: on peut poser $u = \tan x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x \cos x}\, dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x - 1}$$

Exercice 23. Dans tous les cas on peut poser : $u = \tan \dfrac{x}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x - 1} dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x} dx$$

E - 3 Expressions polynômiales en $\sin$ et $\cos$

Exercice 24. Dans ce cas particulier d'expressions rationnelles en sin et cos on peut aussi linéariser :

$$\int_0^{\pi} \cos^3(\theta) d\theta, \quad \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \sin^3(\theta)\cos^2(\theta)\, d\theta, \quad \int \sin^3 t \cos^3 t\, dt$$

E - 4 Expressions rationnelles en $\exp$, $\sinh$, $\cosh$

Exercice 25. on peut poser : $t = e^x$ ou $t = e^{-x}$

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx \quad , \quad \int \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} dx \quad , \quad \int \frac{dx}{2\sinh x + \cosh x + 1}$$

E - 5 Fractions rationnelles obtenues après un changement de variable quelconque

Exercice 26.

$$\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\, dx \ , \qquad \text{poser } t = x^4$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x - 1}}\, dx \ , \qquad \text{poser } u = \sqrt{e^x - 1}$$

F - Autres calculs

Exercice 27.

$$\int \ln(x^2 + 2x + 5)\, dx$$

Exercice 28. Calcul des primitives de la forme $\displaystyle\int P(x)\, e^{rx}\, dx$ par identification :

$$\int x^2 e^x\, dx \quad , \quad \int (x+1)^2 e^{3x}\, dx$$

Chapitre 9

Equations différentielles

A - Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$.
2. $2x' - x = 0$ avec $x(0) = 1$.
3. $y' = xy$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 2.
Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2)y' - y = 0.$$

Quelle est la solution vérifiant $y(1) = 2$?

Exercice 3.

1. Vérifier que $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 2$ est solution de
$$y' + y = x^2$$
2. Déterminer l'ensemble des solutions de
$$y' + y = e^{-x}(\cos x + x^2)$$
3. En déduire les solutions de
$$y' + y = e^{-x}(\cos x + x^2) + x^2$$

Exercice 4.
1 Déterminer les solutions sur $]-\infty, 1[$ de l'équation différentielle

$$(x - 1)y' + (x - 2)y = x(x - 1)^2$$

Quelles sont celles vérifiant la condition $y(0) = 0$?

2 Déterminer les solutions sur $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle précédente.

Exercice 5.
Soit l'équation différentielle

$$(E): \quad |x|y'(x) + y(x) = x^3$$

1 Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2 Montrer que la fonction f définie par

$$f: x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{x^3}{2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{4} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

B - Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 6.
Trouver la solution des problèmes de Cauchy suivants :

1	$y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = y'(0) = 1$	**2**	$9y'' + 24y' + 16y = 0$ et $y'(2) = -3$
3	$y'' - 3y' - y = 0$ et $y'(-1) = 2$	**4**	$y'' - 4y' + 3y = 0$ et $y(0) = y'(0) = 1$
5	$x'' - 6x' + 9x = 0$ et $x'(0) = 2$	**6**	$\theta'' + 9\theta = 0$ et $\theta(\pi/2) = \theta'(\pi/2) = 0.$

Exercice 7.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + 3y = \cos(t)$, en cherchant une solution particulière de la forme $\alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$.
2. $y'' - y' - y = -e^{3t}$, en cherchant une solution particulière de la forme αe^{3t}.
3. $y'' - y' - y = e^t\sin(2t)$, en cherchant une solution particulière de la forme $\alpha e^t\sin(2t) + \beta e^t\cos(2t)$.

Exercice 8.
1 On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{x^2}$. Calculer $f''(x) - 2f(x)$.
2 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2y(x) = 4x^2e^{x^2} + 1$$

Exercice 9.

1. Montrer que l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(t) + \sin(t)$$

   ne peut avoir aucune solution du type $\alpha\cos t + \beta\sin t$.
2. La résoudre en cherchant une solution particulière du type $\alpha t\cos t + \beta t\sin t$.

Exercice 10.
Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis la solution qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$:
1 **a)** $y'' + 2y' - 3y = -t + 1$ **b)** $y'' + 2y' - 3y = e^t$ **c)** $y'' + 2y' - 3y = te^t + 5e^{2t} + \cos t$

2 $x'' - 6x' + 9x = 3 + e^{3t}$

3 $x'' - 3x' = 3 + e^{3t}$

4 $y'' + y = t + \sin t$

5 $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = e^{-x} + \sin(2x)$

6 $y'' - (m+1)y' + my = e^{x} - x - 1$ (discuter suivant les valeurs de m).

Exercice 11.
Un point se déplace sur une droite. On note $x(t)$ sa distance à l'origine, mesurée en mètres, en fonction du temps, mesuré en secondes. Il part de l'origine avec une vitesse de $2m/s$. Son mouvement obéi à la loi

$$x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$$

Déterminer $x(t)$ et calculer sa vitesse quand le point repasse pour la première fois à l'origine.

Chapitre 10

Fonctions de 2 ou 3 variables réelles

A - Généralités

Exercice 1.
Déterminer les ensembles U de $\mathbb{R}^2$ tels que les relations suivantes définissent des fonctions de U dans $\mathbb{R}$:

$$\ln(1-xy) \quad ; \quad \ln((16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4))$$

Exercice 2.
Représenter les champs de vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{V}(x,y) = 2\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} \quad , \quad \overrightarrow{V}(x,y) = x\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j}$$

B - Calcul de gradient, divergence et rotationnel

Exercice 3.
Calculer lorsqu'elles existent les dérivées partielles premières en (x_0, y_0) quelconque puis en $(1,2)$ de $f(x,y) =$

$$x^2+y^2+z^2+2xyz; \quad ; \quad y\ln(x) \quad ; \quad e^y\cos(x+y^2)$$

En déduire le gradient de f en (x_0, y_0) quelconque puis en $(1,2)$.

Exercice 4.
Soient a, b, c, λ des nombres réels fixés. On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y,z) = ax+by+cz+\lambda$$

1 Calculer les dérivées partielles de f en tout point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.
2 On considère maintenant le champ scalaire qui à un vecteur X de composantes (x,y,z) associe $f(x,y,z)$. Quel est son gradient ?

Exercice 5.
1 Si $f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$, trouver $\overrightarrow{grad} f$ au point $(1,-2,-1)$

2 Soit $\overrightarrow{V} = xz^3\,\overrightarrow{i} - 2x^2yz\,\overrightarrow{j} + 2yz^4\,\overrightarrow{k}$, trouver $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}$ au point $(1,-1,1)$.

3 Soit $\overrightarrow{V} = x^2z\,\overrightarrow{i} - 2y^3z^2\,\overrightarrow{j} + xy^2z\,\overrightarrow{k}$, trouver $div\overrightarrow{V}$ au point $(1,-1,1)$.

4 Calculer $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}$ pour le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini par : $\overrightarrow{V} = z\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + y\,\overrightarrow{k}$.

C - Autres exercices

Exercice 6.

A tout point M de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on associe le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}(M) = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$.
Calculer la divergence de ce champ vectoriel.

Exercice 7.
Démontrer

$$\overrightarrow{grad}(fg) = f\,\overrightarrow{grad}\,g \;+\; g\,\overrightarrow{grad}\,f, \qquad div(f\overrightarrow{V}) = f\,div\overrightarrow{V} \;+\; \overrightarrow{grad}\,f.\overrightarrow{V}$$

$$div(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}) \;=\; \overrightarrow{V}\,.\,\overrightarrow{rot}\overrightarrow{U} \;-\; \overrightarrow{U}\,.\,\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}$$

Chapitre 11

Annales

ANNÉE 2004-2005 SESSION DE JANVIER 2005

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 12/01/2005 Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

I.a. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Donner une définition des trois notions suivantes :
- f injective
- f surjective
- f bijective.

I.b. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^2 est-elle injective (comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ? Est-elle surjective (toujours comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ? (on justifiera chaque réponse, qu'elle soit positive ou négative).

I.c. L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe z^2 est-elle injective (comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) ? Est-elle surjective (toujours comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) ? (on justifiera chaque réponse, qu'elle soit positive ou négative).

Série de questions II

Soit x_0 un nombre réel et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable en x_0.

II.a. Que signifie la dernière hypothèse (f dérivable en x_0) ?

II.b. Après avoir rappelé ce que signifiait l'assertion "*f est continue en x_0*", montrer que cette assertion est vraie.

Série de questions III

III.a. Rappeler le principe du raisonnement par récurrence.

III.b. Vérifier par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

On considère l'équation

$$z^3 - 3z + 1 = 0 \qquad (*)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1.a. Soient z, u et v des nombres complexes tels que $u - v = z$. Montrer que si u et v vérifient

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = -1 \\ uv = -1, \end{cases}$$

alors z est solution de (*).

1.b. Montrer que l'équation en z du second degré

$$z^2 + z + 1 = 0$$

a deux racines complexes distinctes z_1 et z_2 que l'on calculera ; expliciter ces deux racines sous forme trigonométrique ($z = re^{i\theta}$) et placer sur une figure représentant le plan complexe les deux points d'affixes respectives z_1 et z_2.

1.c. Soit $x = e^{2i\pi/3}$ et $y = e^{-2i\pi/3}$. En résolvant les équations $u^3 = x$ et $v^3 = -y$, montrer que trois solutions du système de la question **1.a** sont données par

$$\begin{aligned} u = e^{2i\pi/9}, &\quad v = -e^{-2i\pi/9} \\ u = e^{8i\pi/9}, &\quad v = -e^{-8i\pi/9} \\ u = e^{14i\pi/9}, &\quad v = -e^{-14i\pi/9}. \end{aligned}$$

1.d. En déduire trois solutions réelles de l'équation (*).

Exercice 2.

2.a. Calculer la dérivée de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\sin x}.$$

2.b. Déterminer la valeur des limites :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin x}}{x}.$$

Exercice 3.

Soif f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ si } x \leq -5\pi/2 \\ f(x) &= \sin x + 1 \text{ si } -5\pi/2 < x \leq 0 \\ f(x) &= e^x \text{ si } x > 0 \end{aligned}$$

3.a. Etudier les limites aux bornes du domaine de définition.
3.b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3.c. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.d. Etudier la dérivabilité de f' .
3.e. Tracer les graphes de f et f' dans un même repère.

<u>Exercice 4.</u>
4.a. Montrer que si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et x un nombre réel, on a la formule :

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} .$$

4.b. En utilisant la formule précédente avec $n = 2$, exprimer à partir des fonctions usuelles (vues en cours) la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

qui vérifie $F(0) = 0$.

<u>Exercice 5.</u>
Soient $\beta > 0$ et $\omega > 0$ deux nombres réels. On considère le problème de Cauchy du second ordre

$$y''(t) + 2\beta\, y'(t) + \omega^2\, y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. En physique t représente le temps, β le coefficient d'amortissement et ω la pulsation propre du système oscillant.
5.a. Donner l'expression de la solution $t \longmapsto y(t)$ en fonction du paramètre

$$\Delta = \beta^2 - \omega^2\,.$$

5.b. Dessiner l'allure de la solution $t \longmapsto y(t)$ pour $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.
5.c. On considère maintenant $\Delta < 0$. Calculer l'intervalle de temps $[0, T]$ nécessaire à ce que l'amplitude de l'oscillation (valeur de $y(T)$) soit égale à $1/2$.

<u>Exercice 6.</u>
On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2w & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 1 \\ 3x & & & & & - & 3w & = & a \end{array} \right.$$

où a représente un nombre rationnel.
6.a. Résoudre le système pour $a = -3$.
6.b. Combien de solutions admet le système pour $a = 0$?

ANNÉE 2004-2005 — SESSION DE JUIN 2005

GU : MISMI — **UE** : MIS101

Date : 17/06/2005 — Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 8 points (sur 20) et 12 points (sur 20) ; les exercices 1 à 5 de la partie applicative (partie II) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les exercices de chacune des deux parties sont eux aussi totalement indépendants entre eux.

I. PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Exercice I.1

1. Rappeller la formule du binôme pour calculer $(X+Y)^n$ avec $n \geq 1$.

2. Décrire la méthode permettant de calculer les coefficients du binôme $\binom{n}{j}$ pour les valeurs de $j = 0, ..., n$ à l'aide du triangle de Pascal.

3. Écrire la formule complète pour

$$(X+Y)^6.$$

Exercice I.2

On note $T(n) = n(n+1)/2$ pour $n \geq 1$ entier.

1. Montrer que $T(n)$ est un entier (et non pas un rationnel avec dénominateur $\neq 1$) pour tout entier $n \geq 1$.

2. Montrer par récurrence que

$$T(1) + \cdots + T(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

pour tout $n \geq 1$.

Exercice I.3

Justifier l'existence de la dérivée de la fonction définie pour x réel par

$$f(x) = \sin(e^x).$$

et calculer cette dérivée.

Exercice I.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par les conditions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + x & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x) + \sin(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Calculer (en justifiant soigneusement votre calcul) les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\geq 0}} f(x).$$

Expliquer pourquoi le résultat implique que f est continue en 0.

2. Calculer (en justifiant soigneusement votre calcul) les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-1}{x}, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} \frac{f(x)-1}{x}.$$

Expliquer pourquoi le résultat implique que f est dérivable en 0. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

3. Expliquer pourquoi f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$ sur ces deux intervalles et montrer que f' est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ entier à l'aide de la question précédente.

4. Calculer (en justifiant soigneusement votre calcul) les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f'(x)-1}{x}, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\geq 0}} \frac{f'(x)-1}{x}.$$

Expliquer pourquoi le résultat implique que f' *n'est pas* dérivable en 0.

II. DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice II.1

1. Soit $z \neq 0$ un nombre complexe non nul. Expliciter $z/\bar{z}$ en coordonnées polaires (sous la forme $re^{i\theta}$) et en coordonnées rectangulaires (sous la forme $a+ib$) en fonction des coordonnées de z.

2. Montrer que l'application f de $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$f \ : z \in \mathbf{C}^* \longmapsto \frac{z}{\bar{z}}$$

a pour image le cercle unité

$$\mathbf{S} = \{w \in \mathbf{C} \mid |w| = 1\},$$

c'est-à-dire que $f(\mathbf{C}^*) = \mathbf{S}$.

3. Montrer que f n'est pas une application injective. Calculer l'ensemble des antécédents par f de $1 \in \mathbf{S}$ et de $i \in \mathbf{S}$.

4. Calculer les antécédents par f de $(3+4i)/5$.

Exercice II.2

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} 6x - y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + y - 3z = -1. \end{cases}$$

2. Résoudre le système

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ -12x + 21y + 10z = 3 \\ -5x + 9y + 4z = -1. \end{cases}$$

Exercice II.3

1. Soit $x \longmapsto f(x)$ la fonction définie sur $[e, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)},$$

où ln désigne le logarithme néperien. Donner l'expression de la primitive F de f telle que $F(e) = 0$.

2. Montrer par intégration par parties que pour $x \geq e$ on a la relation

$$F(x) = \frac{x}{\ln(x)} - e + \int_e^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}.$$

3. Pour $x \geq e^2$, montrer que

$$\int_e^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\ln(t))^2} \leq \sqrt{x} - e.$$

4. Pour $x \geq e^2$, montrer que

$$\int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \leq \frac{4(x - \sqrt{x})}{(\ln(x))^2}$$

en majorant $1/(\ln(t))^2$ pour $t \geq \sqrt{x}$.

5. À l'aide des trois questions précédentes, montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)\ln(x)}{x} = 1.$$

Exercice II.4

1. Calculer les primitives de la fonction réelle $x \in \mathbf{R} \longmapsto f(x) = e^x \cos(x)$.
[*On pourra faire deux intégrations par parties successives*]

2. Résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + \tan(x)y = e^x(\cos(x))^2,$$

où la fonction inconnue y est définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice II.5

1. Trouver toutes les solutions définies sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

2. Résoudre l'équation précédente avec les conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

3. Résoudre l'équation précédente avec les conditions aux limites

$$y(0) = 1, \quad y(\pi/4) = 1.$$

4. Montrer qu'il n'existe pas de solution avec les conditions aux limites

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1.$$

ANNÉE 2005-2006 — SESSION DE JANVIER 2006

GU : MISMI — **UE** : MIS101

Date : 5/01/2006 — Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

I.a. Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. Définir l'image directe $f(A)$ d'un sous-ensemble A de X et l'image inverse $f^{-1}(B)$ d'un sous-ensemble B de Y.

I.b. Montrer que si f est une application injective de X dans Y, on a $f^{-1}(f(A)) = A$ pour tout sous-ensemble A de X.

Série de questions II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

II.a. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

II.b. Écrire à l'aide de quantificateurs (et sans faire intervenir le symbole de négation $\neg$) l'assertion : "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$".

II.c. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'assertion

$$\exists N \geq 1\,,\ \forall n \geq N\,,\ \forall M \in \mathbb{N}\,,\ |u_n - 2| \leq 10^{-M}\,,$$

alors $u_n = 2$ pour tout n assez grand.

Série de questions III

III.a. Rappeler le principe du raisonnement par récurrence.

III.b. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a la formule

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4n^2(n+1)^2}\,.$$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

1.a. À l'aide des formules d'Euler, calculer $\sin^3\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\sin(3\theta)$ lorsque θ est un nombre réel.

1.b. Montrer (en utilisant le résultat établi au **1.a**) que $\alpha = \sin(\pi/9)$ est une solution de l'équation

$$8X^3 - 6X + \sqrt{3} = 0\,. \qquad (*)$$

1.c. Calculer, en vous aidant encore du résultat établi au **1.a**,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta)\,d\theta\,.$$

Exercice 2.

2.a. Comment la fonction Arctan ("Arctangente") est elle liée à la fonction "tangente" (tan) ? Quel est le domaine de définition de la fonction Arctan ? La fonction Arctan est-elle dérivable sur tout son domaine de définition ? Si oui, calculer sa dérivée.

2.b. Exprimer en termes de fonctions classiques (fonctions polynomiales et prise de racine carrée) les fonctions

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \cos(\mathrm{Arctan}\, x) \\ x & \longmapsto & \sin(\mathrm{Arctan}\, x) \end{array}$$

après avoir précisé leurs domaines respectifs de définition. Calculer ensuite les dérivées de ces deux fonctions.

2.c. Montrer que

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(1+\tan^2 x)\,\cos^2 x} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Exercice 3.

3.a. Soit $a \geq 1$ un entier ; montrer que si a^3 est divisible par 3, alors a est divisible par 3.

3.b. On suppose que l'entier a n'est pas divisible par 3 ; quelles sont les valeurs possibles pour le reste dans la division euclidienne de a par 3 ?

3.c. Trouver, lorsque $a = 1001$, un couple d'entiers (u, v), $u, v \in \mathbb{Z}$, tel que $1 = au + 3v$.

Exercice 4.

4.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que la recherche d'une primitive F_n de la fonction

$$f_n \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n \log(1 + x^2)$$

se ramène à celle de la recherche d'une primitive G_n de la fonction

$$g_n \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^{n+2}}{1 + x^2}$$

(on donnera explicitement la formule permettant d'exprimer une primitive F_n de f_n en fonction d'une primitive G_n de g_n).

4.b. En utilisant l'identité $x^4 = 1 + (1 + x^2)(x^2 - 1)$, déduire de **4.a** une primitive de la fonction g_2, puis de la fonction f_2.

Exercice 5.

Soient R, L, c trois nombres strictement positifs (R pour "résistance", L pour "inductance", c pour "capacité", le modèle sous-jacent étant celui d'un circuit électronique RLC couplant une résistance R, un condensateur de capacité c et une bobine d'inductance L). On suppose que les paramètres sont ajustés pour que $R^2c^2 - 4Lc$ soit un nombre réel strictement négatif que l'on écrit donc sous la forme $R^2c^2 - 4Lc = -\omega^2$ avec $\omega = \sqrt{4Lc - R^2c^2} > 0$.

5.a. Exprimer en fonction de R, L, c, ω l'unique fonction $y \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que

$$L\,c\,y''(t) + R\,c\,y'(t) + y(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

satisfaisant de plus aux conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. La fonction y a-t-elle une limite (finie ou infinie) lorsque t tend vers $+\infty$ (si oui préciser la valeur de cette limite) ? A-t-elle une limite (finie ou infinie) lorsque t tend vers $-\infty$?

5.b. On choisit des valeurs numériques pour les paramètres R, L, c, à savoir : $R = L = 2, c = 1$. Donner explicitement l'unique fonction $y \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que

$$2y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \exp(-t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

satisfaisant de plus aux deux conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6.

On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ le plan P d'équation

$$2x + 4y - 2z = 2\,,$$

On considère aussi (toujours dans $\mathbb{R}^3$) la droite D_m d'équations

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & - & 12y & - & 3z & = & 3 \\ x & + & y & + & mz & = & 3 \end{array}$$

(m étant un paramètre dont la droite dépend).

Chercher (suivant les valeurs de m) les points (x, y, z) d'intersection de P et de D_m ; on posera le système linéaire à 3 inconnues vérifié par les coordonnées de ces points, puis on résoudra ce système par la méthode du pivot.

ANNÉE 2005-2006 — SESSION DE JUIN 2006

GU : MISMI — **UE** : MIS101

Date : 16/06/2006 — Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

On considère l'ensemble

$$U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$$

et les applications f_1 et f_2 de U dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\begin{aligned} f_1 &: z \longmapsto z^3 \\ f_2 &: z \longmapsto z - \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

I.a. Rappeler ce que signifient, pour une application f d'un ensemble E dans un ensemble F les assertions

$$f \text{ injective}$$
$$f \text{ surjective}$$

I.b. Quel est l'ensemble $f_1(U)$? Quel est l'ensemble $f_1^{-1}(\{1\})$? L'application f_1 est elle injective ? surjective de U dans $\mathbb{C}$? surjective de U dans U ?

I.c. Dessiner l'ensemble U et montrer que deux nombres complexes z_1 et z_2 de U tels que $|z_1 - z_2| = 2$ sont nécessairement diamétralement opposés ; en déduire que f_2 est une application injective de U dans $\mathbb{C}$.

Série de questions II

II.a. Ecrire, sans faire apparaître le signe $\neg$ de négation, la négation de l'assertion logique suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ (|x-y| < \eta \Rightarrow |e^x - e^y| < \epsilon)\,.$$

II.b. Ecrire, sans faire apparaître le signe $\neg$ de négation, la négation de l'assertion logique suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall A > 0, \forall \epsilon > 0, \exists y \in \mathbb{R},$$
$$\Big(\big(|x-y| < \epsilon\big) \wedge \Big(\Big|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\Big| > A\Big)\Big)\,.$$

Série de questions III

III.a. Rappeler le principe du raisonnement par récurrence.

III.b. Montrer que pour tout entier non nul n et pour tout nombre réel non nul x, on a

$$\sin x = 2^n \Big(\prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j)\Big)\ \sin(x/2^n)\,.$$

III.c. Écrire en utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ l'assertion :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n}\right)=1\,;$$

cette assertion est elle vraie ou fausse (justifier votre réponse) ?

III.d. Vérifier

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=1}^{n}\cos(x/2^j)\right)=\frac{\sin x}{x}\,.$$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres entiers non nuls premiers entre eux.

1.a. Montrer qu'il existe au moins deux nombres entiers c et d tels que $ad-bc=1$; exhiber deux tels nombres c et d lorsque $a=31$ et $b=6$.

On suppose à partir de maintenant que a,b,c,d sont quatre nombres entiers tels que $ad-bc=1$.

1.b. Pour quelles valeurs de $z\in\mathbb{C}$ la quantité

$$\frac{az+b}{cz+d}$$

est-elle définie (on distinguera les cas $c=0$ et $c\neq 0$) ?

1.c. Si $c=0$, montrer que l'on a nécessairement $a=d$ et que l'équation

$$\frac{az+b}{cz+d}=z$$

n'admet aucune solution dans $\mathbb{C}$.

1.d. Si $c\neq 0$, montrer que l'équation

$$\frac{az+b}{cz+d}=z$$

peut avoir, selon la valeur de $a+d$:
- soit une racine double réelle
- soit deux racines complexes disctinctes et conjuguées
- soit deux racines réelles distinctes.

Déterminer la condition sur $a+d$ correspondant à chacun des trois sous-cas.

Exercice 2.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{(x-4)}-\frac{1}{(x^2-16)}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2+1}-3x}{x-\sqrt{x^2+2}}\right)$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{1/3}-1}{x^3-1}\right).$$

Exercice 3.

On considère la fonction $f\ : \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}\,,\ f(x) = \cos\Big(\frac{\pi}{x^2-1}\Big)\,.$$

3.a. Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ et exprimer en termes de fonctions classiques la fonction dérivée f'.

3.b. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique de terme général

$$u_n = \sqrt{1+\frac{1}{2n}}\,;$$

montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(f(u_n))_{n\geq 1}$ sont convergentes lorsque n tend vers $+\infty$ et calculer leurs limites respectives.

3.c. Déterminer une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels différents de ± 1 telle que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} v_n &= 1 \\ \lim_{n\to+\infty} f(v_n) &= -1\,. \end{aligned}$$

3.d. La fonction f admet-elle une limite en $x = 1$? en $x = -1$? Mêmes questions pour la fonction

$$x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \longmapsto \sqrt{|x^2-1|}\ f(x)\,.$$

Exercice 4.

4.a. Quelle est la dérivée de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \arctan x$ (où arctan désigne la fonction arc-tangente) ? Exprimer à partir des fonctions classiques une primitive de la fonction

$$x \longmapsto x \arctan x\,.$$

4.b. Déterminer des nombres réels a, b, c tels que, pour tout $u \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

$$\frac{u}{(1+u)^2} = \frac{a}{1+u} + \frac{bu+c}{(1+u)^2}\,.$$

4.c. En utilisant un changement de variables approprié et les résultats des deux questions précédentes, exprimer en termes de valeurs numériques de fonctions classiques l'intégrale

$$\int_1^2 x^7\Big(\arctan(x^4) + \frac{1}{(1+x^4)^2}\Big)\,dx\,.$$

Exercice 5.

5.a. En utilisant le changement de variables $u = \tan(t/2)$ (où tan désigne la fonction tangente), montrer qu'une primitive sur $]-\pi/2, \pi/2[$ de la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{\cos t}$$

est la fonction

$$t \longmapsto \log(\tan(t/2+\pi/4))\,,$$

où log désigne le logarithme néperien.

5.b. Trouver toutes les solutions $f\ :]-\pi/2,\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène du premier ordre :

$$\cos t \times f'(t) + \sin t \times f(t) = 0\ ;$$

de combien de paramètres dépendent ces solutions ?

5.c. Un point mobile $M(t)$ de l'axe réel est repéré par son abscisse

$$x(t) = \overline{0M(t)}$$

par rapport à l'origine 0. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le point M est à l'origine ($x(0) = 0$) et que le déplacement du point $M(t)$ en fonction du temps est régi par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\cos t \times x'(t) + \sin t \times x(t) = \cos t\,.$$

Calculer la trajectoire $t \longmapsto x(t)$ du point $M(t)$ à partir de l'instant $t = 0$ (on utilisera le résultat établi au **5.a**). La fonction

$$t \longmapsto x(t)$$

admet-elle une limite lorsque t tend vers $\pi/2$? Dessiner sommairement le graphe de la fonction

$$t \longmapsto x(t)$$

sur l'intervalle $[0,\pi/2[$, puis décrire le mouvement du point mobile $M(t)$ à partir de l'instant $t = 0$.

Exercice 6.

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système :

$$\begin{aligned} x + y + (1-m)z &= m+2 \\ (1+m)x - y + 2z &= 0 \\ 2x - my + 3z &= m+2 \end{aligned}$$

ANNÉE 2006-2007 SESSION DE JANVIER 2007

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 5/01/2007 Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Question I

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$$

(on convient, pour toute partie C de E, de noter $E \setminus C$ le complémentaire de C dans E).

Série de questions II

On considère dans cette série de questions l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2\,x_2$ pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$.

II.a. Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit surjective de E dans F ? Montrer que l'application f donnée ici est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout nombre réel y, on a l'inégalité $y+|y| \geq 0$; montrer enfin que l'application $g\ : y \in \mathbb{R} \longmapsto (\sqrt{y+|y|}, |y|/2)$ est telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

II.b. Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit injective de E dans F ? L'application f donnée ici est-elle injective comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

Série de questions III

III.a. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ ainsi que les symboles mathématiques $\leq, >, \in$, exprimer les deux assertions :
– « a est un majorant de A »
– « a n'est pas un majorant de A ».

III.b. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a un majorant de A ; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ et les symboles $\leq, <, >, \in$, exprimer les deux assertions :
– « a est la borne supérieure de A »
– « a n'est pas la borne supérieure de A ».

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

Soient a et n des éléments de $\mathbb{N}$. On suppose $a \geq 2$ et $n \geq 1$.

1.a. Montrer que les nombres entiers a et $a^n - 1$ sont premiers entre eux.

1.b. Montrer l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$; en déduire que $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ et a^n sont des nombres entiers premiers entre eux.

1.c. On considère l'équation

$$6x + 215y = 1\ ; \qquad (E)$$

- Après avoir vérifié que $215 = 6^3 - 1$, justifier (sans calcul) pourquoi il existe au moins un couple d'entiers relatifs (x, y) satisfaisant (E) ;

– déterminer tous les couples d'entiers relatifs qui satisfont (E).

Exercice 2.

2.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $Z^2 - iZ + 2 = 0$.

2.b. Déduire de **2.a** les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ (on donnera ces solutions sous forme polaire $z = re^{i\theta}$ en précisant les valeurs de r et θ).

2.c. Placer sur un dessin propre tous les points (a, b) du plan tels que $a + ib$ soit une solution de $z^6 - iz^3 + 2 = 0$.

Exercice 3.

3.a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de 34 et 21.

3.b. On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ et

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \,, \ \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

– Rappeler le principe du raisonnement par récurrence et montrer, en appliquant ce principe, que $F_n \in \mathbb{N}$ pour tout n.
– Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, d est un diviseur commun de F_n et F_{n+1} si et seulement si d est un diviseur commun de F_{n+1} et F_{n+2} ; en déduire que $\mathrm{PGCD}\,(F_{n+2}, F_{n+1}) = \mathrm{PGCD}\,(F_{n+1}, F_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
– Déduire de ce qui précède que deux termes consécutifs de la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ sont toujours premiers entre eux.

Exercice 4.

On désigne par « log »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « ln ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. Soit la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+2) & -2 < x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ e^x & 0 < x \end{cases}$$

– Etudier ses limites en -2 et $+\infty$;
– Montrer que f est continue sur I ;
– Montrer que f est dérivable sur I ;
– Etudier les variations de f et tracer son graphe.

Exercice 5.

5.a. On désigne par « log »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « ln ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{e^t + 1}$, transformer l'intégrale

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t + 1}\; dt$$

en l'intégrale sur un intervalle que l'on précisera d'une certaine fraction rationnelle.

5.b. Montrer qu'il existe deux constantes réelles a et b uniques (que l'on calculera) telles que

$$\forall u > 1 \,, \ \frac{1}{u^2 - 1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} \,;$$

déduire de ce résultat (combiné avec celui de **5.a**) la valeur numérique de l'intégrale

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t + 1}\; dt \,.$$

5.c. Exprimer à l'aide des fonctions classiques (logarithme, radicaux, exponentielle) la primitive F (sur $\mathbb{R}$) de la fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{e^t + 1}$$

qui vérifie $F(0) = 0$.

5.d. Calculer les limites lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \log\Big(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big)$$

et en déduire les limites de la fonction F lorsque x tend vers $-\infty$ et x tend vers $+\infty$; justifier pourquoi F réalise une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5.e. Justifier pourquoi l'application réciproque F^{-1} est dérivable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et montrer que la fonction $y = F^{-1}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre :

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{y(x)}+1}}\,,\ x \in \mathbb{R}\,; \tag{$*$}$$

cette équation différentielle $(*)$ est-elle une équation linéaire du premier ordre ?

5.f. Trouver l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{y(x)}{4}\Big)\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \tag{$**$}$$

qui vérifie de plus la condition initiale $y(0) = 0$ [1].

<u>Exercice 6.</u>

6.a. Soient A et B deux paramètres réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle homogène du second ordre :

$$A\,y''(t) + B\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,. \tag{$\dagger$}$$

Quelle inégalité doivent vérifier les paramètres réels strictement positifs A et B pour que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\dagger)$ soient toutes de la forme $t \longmapsto e^{-\lambda t}(C_1\cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$, où λ et ω sont des constantes strictement positives, C_1, C_2 des constantes réelles ; donner dans ce cas en fonction de A et B les valeurs des constantes λ et ω. Que se passe-t-il lorsque l'inégalité en question n'est plus satisfaite ?

6.b. On fixe maintenant $A = 10$ et $B = 2$. Déterminer toutes les solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène du second ordre

$$10\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

6.c. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle du second ordre

$$10\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = \cos(2t)\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

qui vérifie de plus les deux conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

[1] Cette dernière question peut être traitée tout-à-fait indépendamment des précédentes ; pour information, l'équation différentielle $(**)$ réalise une version « approchée »de l'équation différentielle $(*)$.

ANNÉE 2006-2007 SESSION DE FEVRIER 2007

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 26/02/2007, 14.00-17.00 Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Question I

On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{lcl} f\ : x \in \mathbb{R} & \longmapsto & x^3 \in \mathbb{R} \\ g\ : z \in \mathbb{C} & \longmapsto & z^3 \in \mathbb{C} \end{array}$$

a. L'application f (considérée comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est-elle injective ? surjective ?

b. L'application g (considérée comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) est-elle injective ? surjective ?

Justifier soigneusement vos réponses.

Série de questions II

II.a. Rappeler ce que signifie le fait qu'une fonction f définie dans $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ ($a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$) et à valeurs réelles soit *dérivable* au point a ? Le fait que f soit *continue* au voisinage de a implique-t-il que f soit *dérivable* en a ? On justifiera la réponse, qu'elle soit positive ou négative.

II.b. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos a \neq 0$ et f une fonction définie au voisinage de a et dérivable au point a. Calculer en fonction du nombre dérivé $f'(a)$ la limite

$$\lim_{x \to a} \Big(\frac{f(x) - f(a)}{\sin x - \sin a} \Big) .$$

Série de questions III

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe ($a, b \in \mathbb{R}$), on pose

$$\exp(z) := e^a(\cos b + i \sin b) = e^a \times e^{ib} .$$

Trouver tous les nombres complexes z solutions de l'équation

$$\exp(z) = \sqrt{e} ,$$

où e est le nombre réel défini par $\log e = 1$ (log désignant ici le logarithme népérien).

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

1.a. Énoncer le théorème de la division euclidienne.

1.b. Soient a, b deux entiers, tels que $a \geq b > 0$. On écrit la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$.

a. Montrer que $q \geq 1$.

b. En déduire que $a \geq b + r$, puis que $a > 2r$.

1.c. On suppose toujours que a et b sont deux entiers tels que $a \geq b > 0$. Soit $r_0 = r, r_1, \dots, r_n = 0$ la suite des restes obtenus lors du calcul de $\mathrm{PGCD}(a,b)$ par l'algorithme d'Euclide. On suppose pour simplifier que $n = 2k$ est pair ; montrer (en utilisant le résultat établi en **1.b**) que

$$a > 2r_0 > 2^2 r_2 > \cdots > 2^k r_{2k-2} > 2^{k+1} r_{2k} = 0.$$

En déduire que $k < \frac{\log a}{\log 2}$, où log désigne le logarithme néperien.

Exercice 2.

2.a. Soit j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$; montrer que

$$1 + j + j^2 = 0$$

2.b. Quelles sont les valeurs possibles du reste $r(k)$ lors de la division euclidienne d'un entier $k \in \mathbb{N}$ par 3 ? Calculer suivant les différentes valeurs possibles prises par $r(k)$ les nombres j^k et $1 + j^k + j^{2k}$.

2.c. Soit $n = 3m$ un entier positif ou nul multiple de 3. Calculer en fonction de m les nombres $(1+j)^n$, $(1+j^2)^n$, $2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$.

Exercice 3.

Exprimer la fonction

$$f \ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(t)\, \sin^2(t) + \sin(t)\, \cos(2t)$$

sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions

$$\begin{array}{ccl} t & \longmapsto & \sin(kt)\,,\ k \in \mathbb{N}^* \\ & \text{ou} & \\ t & \longmapsto & \cos(mt)\,,\ m \in \mathbb{N}^*\,. \end{array}$$

Exercice 4.

Soit T un nombre réel strictement positif. Déterminer (en fonction de T) l'unique fonction

$$y_T \ :]0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}\,,$$

dérivable sur $]0, +\infty[$ et solution du problème de Cauchy :

$$\begin{array}{rcl} xy'(x) + 2y(x) & = & \dfrac{1}{x^2+1} \\ y_T(T) & = & 1 \end{array}$$

Exercice 5.

5.a. Exprimer en termes d'expressions usuelles, pour $x \in]-1, +\infty[$, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 3t + 2}\,.$$

5.b. La fonction $x \in]-1, +\infty[\longmapsto F(x)$ est-elle dérivable sur $]-1, +\infty[$? Si oui, quelle est sa fonction dérivée ?

5.c. Calculez les limites de la fonction F respectivement en -1 (à droite) et $+\infty$. Montrer que $F(]-1, +\infty[)$ est un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ (que l'on précisera) et que la fonction $F \ : I \longrightarrow J$ admet une fonction réciproque $G \ : J \longrightarrow I$.

5.d. Calculer $G(y)$ en fonction de y. Montrer que G est dérivable en tout point y de J et calculer $G'(y)$ pour $y \in J$.

<u>Exercice 6.</u>

Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \exp(-1/t) \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

6.a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $t = 0$.

6.b. Montrer que f est dérivable en $t = 0$ et calculer $f'(0)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et tracer sommairement le graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

6.c. On rappelle qu'une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable sur I si f est dérivable sur I, de fonction dérivée $f' = f^{(1)}$, avec f' dérivable sur I et de fonction dérivée $f'' = f^{(2)}$, f'' dérivable sur I et de fonction dérivée $f^{(3)}$,..., $f^{(n)}$ dérivable sur I et de fonction dérivée $f^{(n+1)}$, *etc.*

Après avoir rappelé le principe du raisonnement par récurrence, montrer que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction dérivée à l'ordre n (notée $f^{(n)}$) est de la forme

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}} \exp(-1/t) \text{ si } t > 0\,, \end{cases}$$

où P_n est une fonction polynômiale de degré exactement $n - 1$. Préciser la relation de récurrence permettant d'exprimer le polynôme P_{n+1} à partir du polynôme P_n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

Département Licence

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007-2008
Session 1 d'automne

Parcours : MSI **UE :** MSI101

Epreuve : Mathématiques

Date : 4/01/2008 **Heure :** 14h **Durée :** 3h00

Documents non autorisés

La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 points (sur 20) et 14 points (sur 20) ; toutes les séries de questions de la première partie et tous les exercices de la deuxième partie sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

I.a. Montrer que
$$\complement_E A \cup B = \complement_E A \cap \complement_E B.$$

I.b. Vérifier l'égalité ci-dessus dans le cas où $E = \mathbb{R}, A =]-2,3[$ et $B = [3,+\infty[$.

Série de questions II

On considère une application f de D dans $\mathbb{R}$, $a \in D$ et $l \in \mathbb{R}$.

II.a. Ecrire avec des quantificateurs ce que signifie le fait que f ait pour limite le nombre réel l au point a.

II.b. Ecrire avec des quantificateurs : f n'admet pas l comme limite en a.

II.c. Ecrire avec des quantificateurs : f n'admet pas de limite finie en a.

II.d. Pour la fonction f définie par $f(x) = ln(1+x)$, déterminer D et montrer en utilisant II.a. que la fonction f admet une limite réelle l (que l'on précisera) au point $a = 0$.

Série de questions III

On considère une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

III.a. Que signifie le fait que l'application f soit injective, surjective ?

III.b. Que signifie le fait que l'application f soit continue en x_0 ? Donner une caractérisation par les suites.

III.c. Que signifie le fait que l'application f soit dérivable en x_0 ? Donner deux définitions équivalentes.

III.d. Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a + \epsilon(x)$ où ϵ est une fonction continue qui s'annule en x_0.

- f est-elle continue en x_0 ?
- f est-elle dérivable en x_0 ?

Vous justifierez vos réponses en donnant une preuve ou un contre-exemple.

III.e. Soit f l'application définie par $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{x^3 \sin(x^2) + x^2}{2 + \sqrt{|x|}}$, f est-elle dérivable en 0 ?

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1

1.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + Z + 2 = 0$.

1.b. Soient $z = \exp \frac{2i\pi}{7}$ et $u = z + z^2 + z^4$.

- Montrer que $\overline{u} = z^3 + z^5 + z^6$.
- Montrer que $u + \overline{u} = -1$ et en déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}$.
- Montrer que $u^2 + u + 2 = 0$.
- En déduire la valeur de $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$.

Exercice 2

2.a. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{3x + \sqrt{9x^2 + 1}}$.

2.b. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction g définie par
$g(x) = \dfrac{(\ln x)^5 + x^2 e^{2x}}{x^3 - e^{3x}}$.

2.c. Déterminer la limite en 1 de la fonction h définie par
$h(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}{x^2 + x - 2}$.

Exercice 3

3.a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD d de $a = 3289$ et $b = 2737$.

3.b. Déterminer tous les couples d'entiers (u, v) tels que $d = au + bv$.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $v_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{n}{1+n^2t^2}\, dt$. Calculer v_n et en déduire la convergence de la suite (v_n) en précisant sa limite.

Exercice 5

5.a. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $F(x) = \int_0^x t\,(\operatorname{Arctan} t)\, dt$.

5.b. Calculer les limites de F en $+\infty$ et $-\infty$.

5.c. La fonction F est-elle une fonction injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 6

6.a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin x\, dx$.

6.b. Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x(1+\ln x)^3}\, dx$ en utilisant le changement de variable $t = \ln x$.

6.c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^{3/2} + 9\sqrt{x+1}}\, dx$ en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$.

Exercice 7

7.a. Déterminer la primitive de $\dfrac{1}{x-1}$ qui s'annule en $x = 2$.

7.b. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x-1)y'(x) - 2y(x) = (x-1)^3 \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Département Licence

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007-2008
Session 2 d'automne

Parcours : MSI **UE :** MSI101

Epreuve : Mathématiques

Date : 2008 **Heure :** **Durée :** 3h00

Documents non autorisés

La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 points (sur 20) et 14 points (sur 20) ; toutes les séries de questions de la première partie et tous les exercices de la deuxième partie sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire.

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

I.a. Enoncer le principe de démonstration par récurrence.

I.b. L'appliquer pour montrer que 7 divise $6^{2n+1} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Série de questions II

Soit x_0 un réel et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en x_0.

II.a. Traduire avec des quantificateurs que f est continue en x_0.

II.b. On considère l'implication $(\star)$:

Si $f(x_0) = 0$ alors sur tout intervalle ouvert contenant x_0, f prend des valeurs strictement positives et strictement négatives.

Cette implication est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

II.c. Ecrire la réciproque de l'implication $(\star)$.

Cette implication est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Série de questions III

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

III.a. Ecrire avec des quantificateurs la proposition : A est majorée.

III.b. Ecrire avec des quantificateurs la proposition : A n'est pas majorée.

III.c. Soit $A = [1, 2[$, la partie A est-elle majorée ? Admet-elle un plus grand élément ? Admet-elle une borne supérieure ?

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

<u>Exercice 1</u>

Dans cet exercice, on note U l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1.a. Écrire le nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ en notation exponentielle (autrement dit, déterminer son module et son argument).

1.b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

1.c. Pour un nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, démontrer l'équivalence

$$\frac{1+iz}{1-iz} \in U \iff z \in \mathbb{R}.$$

1.d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1+iz}{1-iz} = -1$.

<u>Exercice 2</u>

2.a. Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{sin2x}{x}$.

2.b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{3x + \sqrt{9x^2+1}}$.

2.c. Déterminer la limite en 1 de la fonction h définie par
$h(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{4}}{x^2 + x - 2}$.

<u>Exercice 3</u>

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

3.a. La fonction $x \to \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ admet-elle une limite en 0 ?

3.b. L'application f est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse

3.c. L'application f est-elle dérivable en 0 ? Justifier votre réponse.

3.d. Soit x un réel non nul. Indiquer pourquoi f est dérivable en x et calculer $f'(x)$.

3.e. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = a \arctan x + b$. Déterminer a et b.

3.f. Déterminer les primitives de f.

<u>**Exercice 4**</u>

Calculer les dérivées des fonctions numériques suivantes :

4.a. $f(x) = sin(\dfrac{3}{x})lnx$

4.b. $g(x) = e^{-x}(3sinx)^x$

4.c. $h(x) = tan(e^{-\frac{1}{1+x^2}})$.

<u>**Exercice 5**</u>

5.a. Rappeler la formule du binôme puis développer $(a+b)^5$ avec a et b appartenant à $\mathbb{C}$.

5.b. A l'aide des formules d'Euler, mettre $\cos^5 x$ sous la forme d'une somme de termes de la forme $\cos nx$ et $\sin nx$ (n étant un entier naturel).

5.c. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $g(x) = \cos^5 x$.

<u>**Exercice 6**</u>

6.a. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

.

6.b. En déduire les primitives, sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}$.

6.c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}-e^t}{(e^t+1)(e^{2t}+1)}dt$ en utilisant le changement de variable $x = e^t$.

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies DISVE Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2008/2009** **SESSION 1 D'AUTOMNE** **PARCOURS :** MSI **UE :** MSI 101 **Epreuve :** Mathématiques **Date :** 05 /01/2009 **Heure :** 14h00 **Durée :** 3h00 Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé. Responsable de l'épreuve : J.-Y. Boyer	Département DL Licence

Les exercices sont indépendants. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

Soit f une application de E dans F.

(i) Que signifie « f est injective » ? « f est surjective » ?

(ii) Soient $E = \{0,1\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$.

(a) Déterminer, si elles existent, toutes les applications injectives de E dans F.

(b) Déterminer, si elles existent, toutes les applications surjectives de E dans F.

Exercice 2

(i) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les racines carrées du nombre $80 + 18i$.

(ii) Calculer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$z^2 + (7 - i)z - 8 - 8i = 0.$$

Exercice 3

(i) Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$.

Montrer que f est croissante. Quelle est l'image de $[0, 1]$ par f ?

(ii) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{4}u_n^2 + \frac{1}{4} \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Calculer u_1, u_2, u_3.

(b) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

(c) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4

(i) (a) Soit f une fonction définie sur un domaine D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donner la définition à l'aide de quantificateurs de « f est bornée ».

(b) Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ est bornée.

Tourner la page.../...

(ii) On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \arctan(\frac{1}{x})$.

(a) Sur quel ensemble g est-elle continue ? Dérivable ? Déterminer g'.

(b) Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) \qquad , \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x).$$

(c) L'application g est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
Si c'est le cas, le prolongement est-il dérivable en 0 ?

(d) Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x \arctan(1/x) dx$.
(*On pourra utiliser une intégration par parties.*)

Exercice 5

(i) Déterminer les réels a, b, c tels que :

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

(ii) Déterminer les primitives sur $]1, +\infty[$ de $x \to \dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$.

(iii) En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{e^x}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}\, dx.$$

(*On pourra utiliser un changement de variable.*)

Exercice 6

(i) Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \left(-t + \frac{1}{t^2}\right) e^{-t^2-\frac{2}{t}}$.
Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(ii) Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$t^2 y'(t) + 2y(t) = (1-t^3)e^{-t^2}.$$

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul et x un réel.

(i) En utilisant la formule du binôme de Newton développer $(1+x)^{4n}$.

(ii) Développer $(1+ix)^{4n}$.
En déduire, sous la forme d'une somme, la partie réelle et la partie imaginaire de $(1+ix)^{4n}$.

(iii) Donner la forme trigonométrique de $1+i$ et de $(1+i)^{4n}$.
Déterminer, en fonction de n, $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$.

FIN

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies DISVE Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2008/2009** **SESSION 2 D'AUTOMNE** **PARCOURS :** MSI **UE :** MSI 101 **Epreuve :** Mathématiques **Date :** 12 /06/2009 **Heure :** 14h00 **Durée :** 3h00 Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé. Responsable de l'épreuve : J.-Y. Boyer	Département Licence

Exercice 1

(i) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{4}{x}\right)$.

- (a) Etudier les variations de la fonction f.
- (b) Quelle est l'image de l'intervalle $[2,+\infty[$ par f ?

(ii) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = 4$ et pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{4}{u_n}\right)$.

- (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2 puis qu'elle est décroissante.
- (b) En déduire que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2

(i) Donner, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^3 = 1$.

(ii) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $4\sqrt{2}(-1+i)$.

(iii) Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E)

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$$

et représenter les images des solutions dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

(iv) En utilisant la question (i), écrire sous forme algébrique les solutions de l'équation (E).

(v) Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos(\dfrac{11\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{11\pi}{12})$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si $x \leqslant 1$, $f(x) = x^2$ si $1 < x \leqslant 4$ et $f(x) = 8\sqrt{x}$ si $x > 4$.

(i) Sur quel ensemble f est-elle continue ?

(ii) Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?

Exercice 4

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

(i) $g(x) = \cos^2(4x+1)$

(ii) $h(x) = (x^2+1)^{\cos^2(4x+1)}$

Tourner la page.../...

Exercice 5
Calculer :

$$\int \frac{1}{x^2+5^2}\,dx \quad , \quad \int_0^1 x^2 e^x\,dx \quad , \quad \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\,dx$$

Exercice 6

(i) Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + xy = x$$

(ii) Montrer que le problème de Cauchy linéaire du premier ordre

$$\begin{cases} y' + xy = x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

admet une unique solution y définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

Exercice 7

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 5t + 1 \qquad (E)$$

(i) Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée :

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0 \qquad (E_0)$$

(ii) Déterminer une solution particulière $z(t)$ de la forme $z(t) = at+b$ de l'équation complète (E).

(iii) En déduire la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

FIN

BORDEAUX 1 Sciences Technologies DISVE Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2009/2010** **SESSION 1 D'AUTOMNE** **PARCOURS :** MSI **UE :** MSI 101 **Epreuve :** Mathématiques **Date :** 13/01/2010 **Heure :** 14h00 **Durée :** 3h00 Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé. Responsable de l'épreuve : J.-Y. Boyer	Département Licence

Les exercices sont indépendants. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

(i) **Question de cours** Soient E et F deux ensembles, A une partie de E, B une partie de F, et f une application de E dans F. Donner la définition de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.

(ii) On considère l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{-2i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{-z+2i}{z+2i} \end{array}$.

Partie A

(a) Déterminer $f^{-1}(\{i\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1\})$ et $f^{-1}(\{-i\})$.

(b) f est-elle surjective ?

(c) f est-elle injective ?

Partie B

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

(b) Soit ω une solution dans $\mathbb{C}$ de $z^4 = 1$.
Montrer que si $\omega \neq 1$, ω vérifie $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = 0$.
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $1 + z + z^2 + z^3 = 0$ (on admettra que cette équation admet trois solutions).

(c) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de

$$\left(\frac{-z+2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{-z+2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{-z+2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$$

Exercice 2

(i) **Question de cours** Donner la formule du binôme de Newton.

(ii) Soient a un réel strictement compris entre 0 et 1, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement positive vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a$.

(a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant a^{n-1}u_1$.

(b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel à préciser.

(iii) Pour tout n strictement positif, on pose : $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

(b) En déduire une majoration de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout n strictement positif.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Tourner la page.../...

Exercice 3

(i) **Question de cours**

Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction Arc sinus ?
Donner son ensemble de continuité, de dérivabilité et l'expression de sa dérivée.

(ii) Soit la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}(2x^2 - 1)$

(a) Donner l'ensemble de définition de f.

(b) Etudier la parité et la continuité de f.

(c) Calculer f en 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1.

(d) Sur quels intervalles ouverts, f est-elle dérivable ? Calculer f' sur ces intervalles.

(e) Calculer les limites de f' aux bornes des intervalles sur lesquels f est dérivable.

(f) Donner le tableau de variations de f. Représenter f dans un repère orthonormé.

Exercice 4 Soit x un réel strictement positif .

(i) En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que :

$$\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$$

(ii) En déduire la valeur de $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x}$.

Exercice 5

(i) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(t).e^{-t} dt$ (On pourra intégrer deux fois par parties).

(ii) Exprimer $J = \displaystyle\int_{e^{-2\pi}}^{1} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx$ en fonction de I et en déduire la valeur de J. (On pourra utiliser un changement de variable).

Exercice 6

(i) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$.

Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, les primitives de f sur $]0, +\infty[$.

(ii) Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - 2y = 0 \qquad (EH).$$

(iii) Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - 2y = \ln x \qquad (E).$$

(iv) Déterminer la solution de (E) qui s'annule pour $x = 1$.

(v) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2} - \ln x$. Etudier les variations de la fonction g (sens de variation et limites aux bornes).

fin