Simulation stochastique et méthodes bayésiennes pour le traitement du signal - 2018

TD2 : Loi *a priori*

Rappel On rappelle les définitions des lois usuelles :

1. La loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ sur $\mathbb{R}$ est définie par sa densité :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

2. La loi Beta de paramètres α et β et $Beta(\alpha, \beta)$ a pour densité
$$f_{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{(\beta-1)}\chi_{[0,1]}(x).$$
où la constante $\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \int_0^1 u^{(\alpha-1)}(1-u)^{(\beta-1)}du$ est une constante de renormalisation. On peut remarquer que la loi de densité uniforme sur $[0, 1]$ est un cas particulier de la loi Beta pour les paramètres $\alpha = \beta = 1$.

3. la loi Gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, $Gam(\alpha, \lambda)$ a pour densité
$$f_{(\alpha,\lambda)}(x) = \frac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Exercice 1. Soit X_1 une v.a. suivant la loi binomiale $Bin(n, \theta)$, où n est fixé et où θ suit la loi $Beta(a, b)$.

1. Donner une expression de la loi $\pi(\theta|X_1)$.
2. Même question si on considère une variable $X = (X_i)_{i\leqslant l}$. En quelle valeur est-elle maximale ?

Exercice 2. Soit X_1 une v.a. suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, où θ suit la loi $Gamma(a, b)$.

1. Donner une expression de la loi $\pi(\theta|X_1)$.
2. Même question si on considère une variable $X = (X_i)_{i\leqslant l}$. En quelle valeur est-elle maximale ?

Exercice 3. Montrer que les lois exponentielles, les lois binomiales (avec n fixé), les lois Gamma, les lois Beta et les lois normales sont des modèles exponentiels.

Exercice 4. On considère le modèle
$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{e^{(\alpha-\beta)x}}{1+e^{\alpha-\beta}}, \quad x \in \{0, 1\}.$$

1. De quelle loi s'agit-il ? Montrer qu'elle appartient bien à une famille exponentielle.
2. Donner la forme d'une loi *a priori* conjuguée. Qu'en pensez vous ?

Exercice 5. Soit X_1 une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On considère pour λ la loi *a priori* impropre uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Calculer la loi *a posteriori* $\pi(\lambda|x)$.

Exercice 6. Soit X_1 une v.a. suivant la loi $Bin(n, \theta)$. Donner la loi *a priori* de Jeffreys associée pour le paramètre θ.

Exercice 7. Soit X_1 une v.a. suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Donner la loi *a priori* de Jeffreys associée pour le paramètre θ. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 8. Soit X_1 une v.a. suivant une loi gaussienne $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Donner la loi *a priori* de Jeffreys associée pour le paramètre θ. Qu'en pensez-vous ?