Correction succincte du DS1 du 5/03/21

Exercice I

1) On note R_1, R_2, R_3 les 3 romans
$M_1, M_2, \ldots, M_6$ les 6 livres de mathématiques
P_1, P_2 les deux livres de physique
et $E = \{R_1, \ldots, R_3, M_1, \ldots M_6, P_1, P_2\}$ l'ensemble de tous les livres.
Ranger les livres dans un certain ordre consiste à faire 11 tirages sans remise dans l'ensemble E.

Ainsi $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{11}) \,/\, \omega_i \in E,\ \omega_i \neq \omega_j,\ \forall 1 \leq i \leq 11,\ \forall i \neq j\}$

Ω étant fini, on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Tous les tirages étant équiprobables, on prend pour P la probabilité uniforme.

2)a) Il n'y a qu'un seul rangement par ordre alphabétique possible.

Donc si on note $A =$ " les livres sont rangés dans l'ordre alphabétique "

on a $P(A) = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{1}{11 \times 10 \times \ldots \times 1} = \boxed{\dfrac{1}{11!}}$

choix du premier livre, choix du 2ème livre etc ...

2) b) B = " maths puis romans puis physique "

Il y a $6!$ ordres possibles pour les livres de mathématiques
(6 tirages sans remise dans l'ensemble des 6 livres de mathématiques)

De même, il y a $3!$ ordres possibles pour les romans et 2 ordres possibles pour les livres de physique.

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{6!\,3!\,2!}{11!}}$

2) c) C = " regroupés par thèmes ".

La seule différence avec la question 2) b) est que maintenant on a le choix dans l'ordre des thèmes.
Il y a $3!$ ordres de thèmes possibles.
(3 tirages sans remise).

Donc $\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{6!\,3!\,2! \times 3!}{11!}}$

Exercice II

1) X possède une espérance et une variance car c'est une v.a. bornée.
$\mathbb{E}[X] = 1 \times \mathbb{P}(X=1) + (-1) \times \mathbb{P}(X=-1) = p - (1-p) = 2p-1$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

On a $X^2 = 1$ donc $\mathbb{E}[X^2] = 1$

et $\mathrm{Var}(X) = 1 - (2p-1)^2 = 4p - 4p^2 = 4p(1-p)$

2) X et Y sont discrètes à valeurs dans $\{-1,1\}$ donc $Z = X+Y$ est discrète et à valeurs dans $\{-2,0,2\}$.

$\mathbb{P}(Z=2) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)$ par indépendance

$= p^2$

De même

$\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(X=1, Y=-1) + \mathbb{P}(X=-1, Y=1)$

$= p(1-p) + p(1-p) = 2p(1-p)$

$\mathbb{P}(Z=-2) = \mathbb{P}(X=-1, Y=-1) = (1-p)^2$

3) Par linéarité de l'espérance on a

$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2(2p-1)$

Par indépendance de X et Y on a

$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 8p(1-p)$

Exercice III

1) $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \{X=k\}\right) = \mathbb{P}(X \in \{0,\dots,n\}) = 1$

car l'union est disjointe

(ou dit autrement : $(\{X=k\})_{0\le k\le n}$ est une partition de Ω)

On a $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = c \sum_{k=0}^{n} p^k = \begin{cases} c\left(\frac{1-p^{n+1}}{1-p}\right) & \text{si } p \neq 1 \\ c(n+1) & \text{si } p=1 \end{cases}$

Donc $\boxed{c = \begin{cases} \frac{1-p}{1-p^{n+1}} & \text{si } p \neq 1 \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } p=1 \end{cases}}$

2) X est une v.a. discrète à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$.

Donc $n-X$ est une v.a. discrète à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ également.

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$, alors

$$P(n-X=k) = P(X=n-k) = c\,p^{n-k} = c\,p^n \left(\frac{1}{p}\right)^k$$

$$= \tilde{c} \left(\frac{1}{p}\right)^k \quad \text{avec } \tilde{c} = c\,p^n \text{ (indépendant de } k\text{)}$$

De plus $\tilde{c}$ vérifie nécessairement $\tilde{c} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{p}\right)^k = 1$.

En particulier on trouve que $X \sim \mathcal{L}(n, 1/p)$

(Rem : si on note c_p la constante c correspondant au paramètre p, alors on a aussi montré que $c_{1/p} = c_p\, p^n$)

3) $P(X=Y) = P\left(\bigcup_{i=0}^{n} \{X=Y=i\}\right) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n}}_{\text{réun. disjointe}} P(X=i;\, Y=i)$

$$= \sum_{i=0}^{n} P(X=i)\, P(Y=i) \quad \text{par indépendance.}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} c p^i c p^i = c^2 \sum_{i=0}^{n} (p^2)^i = \boxed{\begin{cases} c^2 \times \dfrac{1-p^{2(n+1)}}{1-p^2} & \text{si } p \neq 1 \\ c^2 \times (n+1) = \dfrac{1}{n+1} & \text{si } p=1 \end{cases}}$$

Exercice IV

1) On note P_1 = "la pièce tirée correspond à la première pièce"
P_2 = "——— seconde ———"

P_1, P_2 est une partition de Ω.
X est une v.a. à valeurs dans $\{0,1\}$.

$$P(X=1) = P(X=1 \mid P_1) P(P_1) + P(X=1 \mid P_2) P(P_2)$$ d'après la formule des probabilités totales

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + p \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{2}\right)$$

Nécessairement, $P(X=0) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{2}\right)$ et $\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}$

2) On sait ~~que~~ P_2 est réalisé, on a dans la main la seconde pièce. On réalise n expériences indépendantes (n lancers) chaque expérience ayant une probabilité p de succès (obtenir un pile) et on compte le nombre de succès : le nombre de succès suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.
En particulier on a, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\underline{P(Y=k \mid P_2) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

3) D'après la formule des probabilités totales on a, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P(Y=k) = P(Y=k|P_1)P(P_1) + P(Y=k|P_2)P(P_2)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} + C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \right]}$$

Remarque : Y ne suit pas une loi binomiale !

4) on peut calculer $P(P_1 | Y=k)$:

$$P(P_1 | Y=k) = \frac{P(P_1 \cap \{Y=k\})}{P(Y=k)} = \frac{P(Y=k|P_1)P(P_1)}{P(Y=k)}$$

$$= \frac{C_n^k \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\left(C_n^k \frac{1}{2^n} + C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\right)} = \boxed{\frac{1/2^n}{\frac{1}{2^n} + p^k(1-p)^{n-k}}}$$