10/05/21

Correction succincte du DST

Exercice 1

1) Remarquons tout d'abord qu'une densité est positive donc nécessairement $\underline{c > 0}$.

Ensuite, une densité vérifie $\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy}_{:= I} = 1$

En appliquant Fubini on a

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} c e^{-x} \mathbb{1}_{0 \leq |y| < x}\, dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} c e^{-x} \int_{-x}^{x} dy \, \mathbb{1}_{x > 0}\, dx = 2c \int_{\mathbb{R}} x e^{-x} \mathbb{1}_{x > 0}\, dx$$

$$= 2c \int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx \overset{IPP}{=} 2c \left(\left[-x e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \right)$$

$$= 2c \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = 2c$$

Donc $\boxed{c = \frac{1}{2}}$

2) (X,Y) est un couple à densité, donc X est à densité et ainsi $P(X=0) = 0$. En particulier $\underline{V \text{ est bien définie p.s.}}$

Montrons que (U,V) est à densité par la méthode de la fonction muette.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive quelconque.

$$\mathbb{E}[\varphi(U,V)] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(X, \frac{Y}{X}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(x, \frac{y}{x}\right) f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \quad \left(\begin{matrix}\text{car } (X,Y) \\ \text{à densité}\end{matrix}\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(x, \frac{y}{x}\right) c\,e^{-x}\,\mathbb{1}_{0 \leq |y| < x}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \varphi\left(x, \frac{y}{x}\right) c\,e^{-x}\,dx\,dy \quad \text{avec } \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0,\ |y| < x\}$$

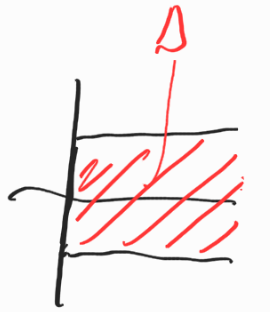
ouvert de $\mathbb{R}^2$.

on pose $h : \mathcal{D} \longrightarrow \Delta$

$$(x,y) \longmapsto \left(x, \frac{y}{x}\right) = (u,v)$$

avec $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u > 0, |v| < 1\}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$

en effet $\begin{cases} x > 0 \\ |y| < x \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \left|\frac{y}{x}\right| < 1 \end{cases}$



$$\begin{cases} x = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases}$$

Donc h inversible et $h^{-1} : \Delta \longrightarrow \mathcal{D}$

$$(u,v) \longmapsto (u, uv)$$

h et h^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ donc h est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

$$\text{Jac } h^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

Le théorème de changement de variable nous donne

$$\mathbb{E}[\varphi(U,V)] = \iint_{\Delta} \varphi(u,v)\, c e^{-u} |u| \, du\, dv$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(u,v) \underbrace{c u e^{-u} \mathbb{1}_{u>0} \mathbb{1}_{|v|\leq 1}}_{g(u,v)} \, du\, dv$$

Donc (U,V) est un couple à densité, de densité g.

3) $g(u,v) = c u e^{-u} \mathbb{1}_{u>0} \mathbb{1}_{|v|<1}$ s'écrit comme une fonction de u et une fonction de v. Donc d'après le cours, U et V sont indépendantes, U et V sont à densité (car (U,V) à densité), la densité de V notée f_V est proportionnelle à $\mathbb{1}_{|v|<1}$ et la densité de U notée f_U est proportionnelle à $c u e^{-u} \mathbb{1}_{u>0}$.

Donc $\boxed{f_V(v) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{|v|\leq 1}}$ (positive, d'intégrale 1)

et $\boxed{f_U(u) = u e^{-u} \mathbb{1}_{u>0}}$ (car $f_U(u) f_V(v) = g(u,v)$).

Exercice 2 :

1) U_1 est une v.a. à densité, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de U_1 au point t vaut

$$\varphi_{U_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itU_1}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} \mathbb{1}_{[0,1]}(u)\, du$$

$$\boxed{\varphi_{U_n}(t) = \begin{cases} \left[\frac{e^{itu}}{it}\right]_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it} & \text{si } t \neq 0 \\ [u]_0^1 = 1, & \text{si } t = 0 \end{cases}}$$

La fonction de répartition :

$t \in \mathbb{R}$,

$$F_{U_1}(t) = P(U_1 \leq t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

car U_1 à valeurs dans $[0,1]$ p.s.,

si $t \in [0,1[$,

$$F_{U_1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{U_1}(u)\,du = \int_0^t du = t.$$

Donc $\boxed{F_{U_1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 1 \\ t & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}}$

Rem : F_{U_1} est bien continue.

2) $U_n(\Omega) = [0,1]$ donc $(\lfloor n U_n \rfloor)(\Omega) = \{0, \dots, n\}$

i.e. $\lfloor n U_n \rfloor$ est une v.a. discrète

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$

$$P(\lfloor n U_n \rfloor = k) = P(k \leq n U_n < k+1) = P\left(U_n \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\right)$$

$$= \int_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[} \mathbb{1}_{[0,1]}(u)\,du$$

$$= \begin{cases} \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n} & \text{si } k \in \{0, \dots, n-1\} \\ 0 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Donc $\boxed{X_n \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, n-1\})}$

3) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\underline{\varphi_{X_n}(t)} = \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \sum_{k=0}^{n-1} e^{itk} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{it})^k$$

$$\boxed{= \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{1-e^{itn}}{1-e^{it}} & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}}$$

$$\underline{F_{X_n}(t)} = \mathbb{P}(\lfloor nU_n \rfloor \leq t) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \leq t}} \mathbb{P}(X_n = k)$$

$$\boxed{= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq n-1 \\ \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{n} & \text{si } t \in [0, n-1[\end{cases}}$$

4) On peut regarder la convergence de la fonction de répartition <u>ou</u> de la fonction caractéristique.

↳ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

La fonction nulle n'est pas une fonction de répartition (car ne tend pas vers 1 en $+\infty$), donc $(X_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas en loi.

↳ De la même façon,

$$\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 1 \text{ si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$ qui n'est pas une fonction caractéristique (pas continue en 0).

5) Encore une fois, on peut regarder ce qui se passe pour la fonction caractéristique <u>ou</u> la fonction de répartition.

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq t\right) = \mathbb{P}(X_n \leq nt) = F_{X_n}(nt)$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq \frac{n-1}{n} \\ \frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n} \quad t \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right[\end{cases}$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{n-1}{n} \to 1$

Donc si $0<t<1$, $\exists N, \forall n \geq N, \frac{n-1}{n} > t$

et $F_{Y_n}(t) = \frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nt+1}{n} \sim t$

Si $t=0$ $F_{Y_n}(t) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Ainsi $F_{Y_n}(t) \xrightarrow{n\to+\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ t & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ fonction de répartition de U_1.

$\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} U_1}$.

Exercice 3 :

1) $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ donc $Y_n(\Omega) = \{0, n\}$.

$P(Y_n = n) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha}$

$P(Y_n = 0) = P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$

2) Soit $\varepsilon > 0$ fixé

$P(|Y_n - 0| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) + \underbrace{P(Y_n < -\varepsilon)}_{=0}$

$= P(Y_n = n)$ pour $n > \varepsilon$

$= \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ car $\alpha > 0$.

Donc, par définition, $\underline{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0}$.

3) $\mathbb{E}[|Y_n - 0|^2] = \mathbb{E}[Y_n^2] = n^2 \, \mathbb{P}(Y_n = n) = \frac{n^2}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$

Donc $\mathbb{E}[|Y_n - 0|^2] \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ ssi $\alpha - 2 > 0$

i.e. $\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} 0 \quad \text{ssi} \quad \alpha > 2}$

De plus, Y_n ne peut pas converger dans L^2 vers autre chose que 0 car la cvgence L^2 implique la cvgence en probabilité.

4) D'après le lemme de Borel-Cantelli, si pour tout $\varepsilon > 0$

$\mathbb{P}(|Y_n - 0| > \varepsilon)$ est le terme général d'une série convergente

alors $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$.

Or $\mathbb{P}(|Y_n - 0| > \varepsilon) = \frac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série

convergente ssi $\alpha > 1$ d'après le critère de Riemann.

Donc $\underline{\text{si } \alpha > 1}$, $\underline{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0}$.

Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante, on peut appliquer le sens réciproque dans le lemme de Borel-Cantelli. Pour cela on a besoin d'avoir l'hypothèse suivante : les $\{|Y_n - 0| > \varepsilon\}$ sont des événements aléatoires indépendants.

Cette hypothèse est vérifiée lorsque les v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

Donc, si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes, alors

$$\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0 \quad \text{ssi} \quad \alpha > 1}$$

5) a) $Z_n(\Omega) = \{0, n\}$.

$$\mathbb{P}(Z_n = n) = \mathbb{P}(U < 1/n) = \int_{-\infty}^{1/n} f(x)\,dx = \int_0^{1/n} dx = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_n = n) = 1 - 1/n$$

b) $Z_n(\omega) = n\,\mathbb{1}_{U(\omega)<1/n} = 0$ ssi $U(\omega) < 1/n$

Donc si $U(\omega) > 0$, $Z_n(\omega) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

et si $U(\omega) \leq 0$, $Z_n(\omega) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

Ainsi $\mathbb{P}(\{\omega,\ Z_n(\omega) \xrightarrow{n\to+\infty} 0\}) = \mathbb{P}(\{\omega,\ U(\omega) > 0\})$

$= \mathbb{P}(U > 0) = 1$ car $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

Donc $Z_n \xrightarrow[p.s.]{n\to+\infty} 0$

c) Si on pose $X_n = \mathbb{1}_{U<1/n}$ alors $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$ (i.e. $\alpha = 1$)

On a un exemple de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ telles que $n X_n \xrightarrow[p.s]{n\to+\infty} 0$ et α ne vérifie pas $\alpha > 1$.

Donc la condition $\alpha > 1$, n'est pas une condition nécessaire dans le cas général pour avoir $n X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$.

Exercice 4

1) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$aX \sim \mathcal{N}(0, a^2)$ et $bY \sim \mathcal{N}(0, b^2)$ d'après le cours

De plus aX et bY sont indépendantes car X et Y le sont

Donc, toujours d'après le cours, $aX + bY \sim \mathcal{N}(0, a^2+b^2)$

Ainsi, toute combinaison linéaire de X et Y est une v.a. gaussienne, donc par définition (X,Y) est un vecteur gaussien.

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ donc $\boxed{\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

On note $\Gamma_{(X,Y)}$ la matrice de covariance de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Alors

$$\Gamma_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} Var(X) & Covar(X,Y) \\ Covar(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

car X et Y indépendantes implique que $covar(X,Y) = 0$

2) Si Γ est la matrice de covariance d'un vecteur $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ alors

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Var\, U & cov(U,V) \\ cov(U,V) & Var\, V \end{pmatrix}$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $|Cov(U,V)| \leq \sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}$

Donc si $Var(U) = Var(V) = 1$, $\boxed{|\rho| = |Cov(U,V)| \leq 1}$.

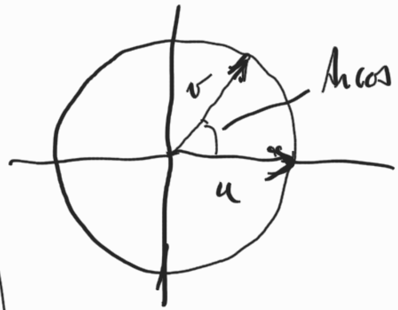
3) on cherche $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

on note u (resp. v) la première (resp. seconde) colonne de A^T.

alors $AA^T = \begin{pmatrix} u^T \\ v^T \end{pmatrix} (u \ v) = \begin{pmatrix} \|u\|^2 & \langle u,v\rangle \\ \langle u,v\rangle & \|v\|^2 \end{pmatrix}$

on cherche donc deux vecteurs u et v de norme 1 et de produit scalaire ρ.

Il suffit de prendre



i.e. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$

on a bien $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

4) $A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est une transformation linéaire du vecteur gaussien $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ donc d'après le cours

c'est également un vecteur gaussien.

$\mathbb{E}\left[A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right] = A\,\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right] = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{Cov}\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right) = \mathbb{E}\left[A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\left[A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right]^T\right] = \mathbb{E}\left[A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}^T A^T\right]$$

$$= A\,\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}^T\right]A^T$$ par linéarité de l'espérance.

$$= A\,\Gamma_{(X,Y)}\,A^T$$ par définition de la matrice de covariance $\left(\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$

$$= A\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}A^T = AA^T = \Gamma$$ d'après 1) et 3).

5) on pose $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive quelconque.

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)\right]$$

or $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ est un vecteur à densité (X, Y à densité et indépendantes)

de densité $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$.

Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}\right)\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\,dx\,dy.$$

on pose h $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

d'inverse $h^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \mapsto A^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

A est bien inversible car $\det A = 1-\rho^2 < 1$ vu que $|\rho|<1$.

h, h^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ donc h est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$\operatorname{Jac} h^{-1} = \det A^{-1} = (\det A)^{-1} = (1-\rho^2)^{-1/2}$

$$\mathbb{E}\left[\varphi\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) \underbrace{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{(u\ v)(A^{-1})^T A^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}}{2}}}_{g(u,v)} \, du\, dv$$

Donc $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$ est un vecteur à densité, de densité g.

Remq : $(A^{-1})^T A^{-1} = (AA^T)^{-1} = \Gamma^{-1}$

donc $$\boxed{g(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{(u,v)\Gamma^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}}{2}}}$$

6) Si $|\rho|=1$, Γ n'est pas inversible, donc le calcul de 5) n'est pas valable.

Si $\rho=1$, $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}$ qui n'est pas à densité car prend ses valeurs dans l'ensemble $\{(x,x) / x\in\mathbb{R}\}$ de mesure de Lebesgue nulle.

De même, si $\rho=-1$, $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\-X\end{pmatrix}$ qui n'est pas à densité.

Exercice 5 :

1) Pour tout $a\in\mathbb{R}$, $|X-a|^r$ est une variable aléatoire positive donc $\mathbb{E}[|X-a|^r]$ est bien définie (éventuellement vaut $+\infty$) et est positive.

Enfin $\mathbb{E}\left[|X-0|^r\right] < +\infty$

Donc $\left\{ \mathbb{E}\left[|X-a|^r\right] / a \in \mathbb{R} \right\}$ est minoré par 0 et possède au moins une valeur réelle : $0 \leq m_r < +\infty$.

2) $\mathbb{E}\left[|X-a|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|^2 + 2|a||X| + a^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|^2\right] + 2|a|\mathbb{E}\left[|X|\right] + a^2$

$$\leq \mathbb{E}\left[|X|^2\right] + 2|a|\,\mathbb{E}\left[|X|^2\right]^{1/2} + a^2 \quad \text{(Jensen)}$$

$$< +\infty \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

De plus $\mathbb{E}\left[|X-a|^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2aX + a^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2a\,\mathbb{E}[X] + a^2$

c'est un trinome en a, qui possède un minimum en $a^* = \mathbb{E}[X]$

On a alors $m_2 = \mathbb{E}\left[|X-a^*|^2\right] = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$ qui est la définition de la variance de X.

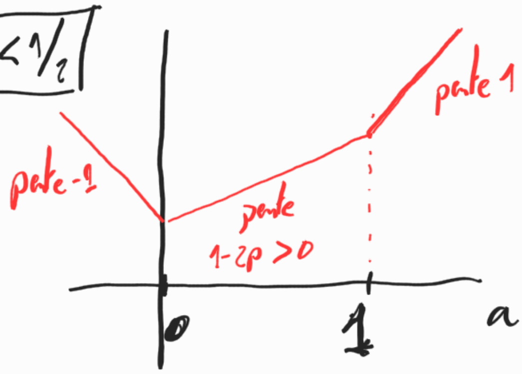
3) Soit $a \in \mathbb{R}$. $X \sim \mathcal{B}(p)$.

$$\mathbb{E}\left[|X-a|\right] = |1-a|\,P(X=1) + |0-a|\,P(X=0) = |1-a|p + |a|(1-p)$$

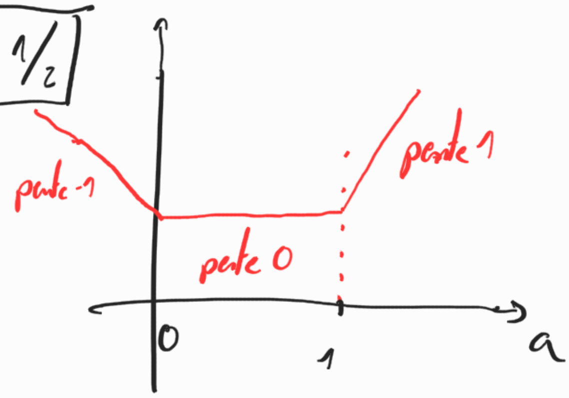
$$= \begin{cases} (1-a)p - a(1-p) = p - a & \text{si } a \leq 0 \\ (1-a)p + a(1-p) = p + a(1-2p) & \text{si } a \in [0,1] \\ (a-1)p + a(1-p) = a - p & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

On a trois cas de figure, en fonction des valeurs de p :

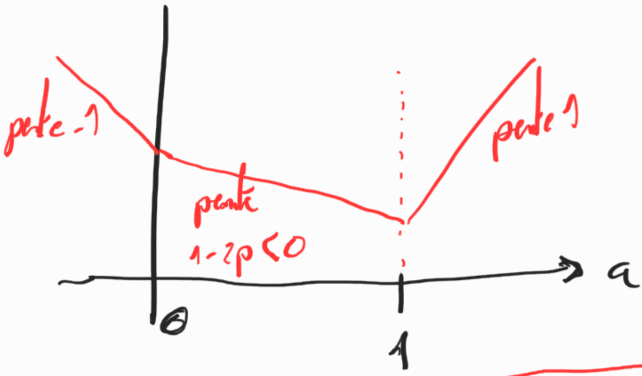
$\boxed{p < 1/2}$



$\boxed{p = 1/2}$



$\boxed{p > 1/2}$



Donc,

$$\boxed{m_1 = \begin{cases} \mathbb{E}[|X|] = p & \text{si } p < 1/2 \\ \mathbb{E}(|X-1|] = 1-p & \text{si } p > 1/2 \\ \mathbb{E}(|X|] = \mathbb{E}(|X-1|] = \frac{1}{2} & \text{si } p = 1/2 \end{cases}}$$