université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018** **PARTIEL** **PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales, L3 Ingénierie Mathématique et CMI **Epreuve : Probabilités** **Date : 15/03/2018** **Heure : 9h15-10h45** **Durée : 1h30** *Responsable de l'épreuve*: A. Richou *Documents*: Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Département Licence

Exercice 1. On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux boules rouges et une boule verte et l'urne B ne contient qu'une boule rouge. On suppose que l'on tire au hasard une boule de l'urne A pour la placer dans B, puis que l'on tire au hasard une boule de l'urne B pour la placer dans A.

1) Qu'elle est la probabilité qu'après les deux tirages l'urne A contienne trois boules rouges et l'urne B une boule verte ?

2) Quelle est la probabilité qu'après les deux tirages la configuration des urnes soit identique à la configuration initiale (deux boules rouges et une verte en A, une boule rouge en B) ?

3) Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit verte sachant qu'on est revenu à la configuration initiale après les deux tirages ?

Exercice 2. Les plaques d'immatriculation françaises sont composées de deux lettres, trois chiffres et à nouveau deux lettres. Les 26 lettres de l'alphabet et les 10 chiffres de 0 à 9 peuvent être utilisés. On choisit au hasard un numéro d'immatriculation.

1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Calculer la probabilité des évènements suivants :

a) A = "Toutes les lettres et tous les chiffres sont différents"

b) B = "La plaque est un palindrome, c'est-à-dire qu'elle se lit de la même façon dans les deux sens"

c) C = "La plaque a exactement deux A et deux 0"

On donnera et justifiera les formules permettant d'aboutir au résultat et on fera le calcul numérique arrondi au centième.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = ax^2 \mathbb{1}_{[-1,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer la valeur de a pour que f soit une densité de probabilité.

2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer la fonction de répartition de X.

3) On considère une nouvelle variable aléatoire réelle $Y = X^2$. Donner la loi de Y. Cette variable aléatoire est-elle à densité ?

Exercice 4. On se donne X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et $\lambda > 0$. On rappelle que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On pose $Z = (2Y - 1)X$.

1) Donner la loi de Z.

2) Calculer l'espérance et la variance de Z. On ne suppose pas connues l'espérance et la variance de la loi de Poisson.

3) Les variables Z et Y sont-elles indépendantes ? Même question avec les variables Z^2 et Y.