université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **PARTIEL** **PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales, L3 Ingénierie Mathématique et CMI **Épreuve : Probabilités** **Date : 20/03/2019 Heure : 17h00-18h30 Durée : 1h30** *Responsable de l'épreuve*: A. Richou *Documents*: Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Département DL Licence

Exercice 1. Donner la définition d'une mesure de probabilité.

Exercice 2. Lors d'une collecte de sang, 18 personnes se sont présentées. Parmi celles-ci, on a noté 11 personnes du groupe O, 4 personnes du groupe A, 2 personnes du groupe B et une personne du groupe AB. A l'issue de la collecte, on prélève au hasard 3 flacons parmi les 18 obtenus.

1. Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité des événements suivants (Il n'est pas demandé de faire le calcul numérique et on pourra conserver les probabilités sous forme de fractions mais on donnera et justifiera les formules permettant d'aboutir au résultat) :
   (a) Les sangs des 3 flacons appartiennent au même groupe.
   (b) Parmi les 3 flacons prélevés, il y a au moins 1 flacon contenant du sang du groupe A.
   (c) Les sangs des 3 flacons appartiennent à trois groupes différents.

Exercice 3. On considère $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

1. Montrer que $T := X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n+1,p)$.
2. Donner la loi de $Z := XY$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Z.
4. Calculer $\mathbb{P}(T = 0, Z = 0)$.
5. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. On considère deux universités françaises dénommées A et B dans lesquelles sont réalisées aléatoirement des exercices incendies. On note X_A, respectivement X_B, le jour (après la rentrée) où l'exercice est réalisé dans l'université A, respectivement l'université B. On suppose que $X_A(\Omega) = X_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_A = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_B = k) = \frac{C}{k(k+1)} = C\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

1. Montrer que $C = 1$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_A]$ et $\mathrm{Var}(X_A)$. Que peut-on dire de $\mathbb{E}[X_B]$?
3. On tire au hasard une des deux universités A ou B avec probabilité $1/2$ et on note X le jour de l'exercice incendie observé.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) On observe que l'exercice incendie a lieu le jour k ($k \in \mathbb{N}^*$). Quelle est la probabilité que l'université observée soit l'université A ?