université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019/2020** **PARTIEL** **PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales, L3 Ingénierie Mathématique et CMI **Épreuve : Probabilités** **Date : 26/02/2020** **Heure : 17h00-18h30** **Durée : 1h30** *Responsable de l'épreuve*: A. Richou *Documents*: Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Département Licence

Questions de cours.

1. Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
2. Donner la formule des probabilités totales.

Exercice 1. On lance 5 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

1. Trouver un univers Ω et une probabilité permettant de modéliser l'expérience.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) On obtient exactement une fois Face.
   (b) On obtient au moins une fois Face.
   (c) On obtient Pile au premier tirage ou Face au troisième tirage.
   (d) On obtient une série d'au moins trois Pile ou trois Face, c'est-à-dire au moins trois Pile ou trois Face successifs.

Exercice 2. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Rademacher de paramètre $p \in]0,1[$ si X est une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telle que

$$\mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On note alors $X \sim \mathcal{R}(p)$.

1. Soit $X \sim \mathcal{R}(p)$. Que vaut $\mathbb{P}(X = -1)$?
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On considère $Y \sim \mathcal{R}(p)$ indépendante de X et on pose $Z = XY$. Donner la loi de Z.
4. Sachant que l'on observe l'événement $Z = 1$, calculer la probabilité d'avoir $X = 1$.
5. On considère $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{R}(p)$. Donner la loi de $\prod_{i=1}^n X_i$.

Exercice 3. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$ et $Y \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer la fonction de répartition de X.
2. Donner la loi de $Z := XY$.
3. Y et Z sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 4. On considère une variable aléatoire réelle X de densité

$$f(x) = ce^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ un paramètre, et c une constante.

1. Calculer c.
2. Calculer la fonction de répartition de X.