université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2020/2021** **SESSION 1 DE PRINTEMPS** **PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales, L3 Ingénierie Mathématique et CMI ISI **CODE UE** : M1MA6M11 **Épreuve : Probabilités** **Date : 10/05/2021** **Heure : 14h30-17h30 Durée : 3h** *Responsable de l'épreuve*: M. RICHOU *Documents*: Non autorisés. La calculatrice homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	Département Licence

Exercice 1. On considère un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) à densité, de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = ce^{-x}\mathbb{1}_{0\leqslant|y|<x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

avec c une constante réelle. On définit également deux nouvelles variables aléatoires $U = X$ et $V = Y/X$.

1. Calculer la valeur de c.
2. Montrer que le couple aléatoire (U, V) est bien défini, qu'il est à densité et calculer sa densité.
3. Montrer que U et V sont indépendantes, à densité et calculer leur densité.

Exercice 2. On considère $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est une v.a. à densité, de densité

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $X_n = \lfloor nU_n \rfloor$ et $Y_n = \frac{\lfloor nU_n \rfloor}{n}$ où $\lfloor . \rfloor$ représente la fonction partie entière.

1. Calculer la fonction caractéristique ainsi que la fonction de répartition de U_1.
2. Montrer que X_n suit une loi uniforme sur un ensemble que l'on déterminera.
3. Calculer la fonction caractéristique ainsi que la fonction de répartition de X_n.
4. Est-ce que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi ?
5. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers U_1.

Exercice 3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de loi $\mathcal{B}(n^{-\alpha})$ avec $\alpha > 0$ un paramètre fixé. On pose $Y_n = nX_n$.

1. Donner la loi de Y_n.
2. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en probabilité.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans L^2.
4. Donner une condition suffisante sur α pour que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement. Que peut-on ajouter comme hypothèse sur les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que cette condition suffisante devienne une condition nécessaire et suffisante ?
5. Dans la suite on considère U une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ c'est à dire que U est une variable aléatoire à densité, de densité

   $$f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   On pose également $Z_n = n\mathbb{1}_{U<1/n}$.

(a) Donner la loi de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

(c) Que peut-on en déduire concernant la question 4. ?

Exercice 4. On considère X et Y deux variables alétoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On rappelle que X et Y ont pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

et pour fonction caractéristique

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que (X,Y) est un vecteur gaussien. Donner son espérance et sa matrice de covariance.

2. On considère la matrice
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$
avec ρ un paramètre. Montrer que nécessairement $|\rho| \leqslant 1$ pour que Γ soit une matrice de covariance. On suppose cette condition vérifiée jusqu'à la fin.

3. Construire une matrice carrée A telle que $AA^\top = \Gamma$.

4. Montrer que $A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance Γ.

5. On définit un nouveau vecteur aléatoire en posant $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et on suppose $|\rho| < 1$. À l'aide de la méthode de la fonction muette, montrer que $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est un vecteur à densité et calculer sa densité.

6. Que se passe-t-il lorsque $|\rho| = 1$?

Exercice 5. On considère un paramètre $r \geqslant 1$ et une variable aléatoire réelle X telle que $\mathbb{E}[|X|^r] < +\infty$. On définit la quantité

$$m_r := inf_{a\in\mathbb{R}}\mathbb{E}[|X-a|^r].$$

1. Montrer que m_r est bien définie et vérifie $0 \leqslant m_r < +\infty$.

2. Montrer que m_2 est la variance de X.

3. Calculer m_1 pour la loi $\mathcal{B}(p)$ lorsque $p \in [0,1]$. On veillera à séparer les cas $p < 1/2$, $p = 1/2$ et $p > 1/2$.