Feuille de TD 5
Vecteurs aléatoires gaussiens

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer

$$\mathbb{P}(X \geq 0), \qquad \mathbb{P}(X < 1), \qquad \mathbb{P}(X \leq -2), \qquad \mathbb{P}(-2 < X \leq 1).$$

Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(1,4)$. Calculer

$$\mathbb{P}(Y \geq 0), \qquad \mathbb{P}(2 < Y \leq 3), \qquad \mathbb{P}(0 \leq Y < 1), \qquad \mathbb{P}(|Y| > 1).$$

Exercice 2. On suppose que les versements annuels des jeunes de moins de vingt ans, dans une agence bancaire, suivent une loi normale d'espérance 600€ et d'écart-type 100€. Calculer la probabilité que les versements annuels soient

1) inférieurs à 600€.
2) compris entre 590€ et 610€.
3) compris entre 560€ et 620€.

Quel est le montant minimal de versement annuel effectué par les 20% des jeunes effectuant les plus gros versements ?

Exercice 3. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ avec $a = (a_1, ..., a_n)$ et $b = (b_1, ..., b_n)$. On pose

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k.$$

Déterminer la loi de A et de B.
Montrer que A et B sont indépendantes ssi le produit scalaire entre a et b est nul.

Exercice 4. Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $Y = X\mathrm{I}_{\{|X| \leq a\}} - X\mathrm{I}_{\{|X|>a\}}$ avec $a > 0$.

1) Quelle est la loi de Y ?
2) Montrer que X admet des moments de tous ordres et les calculer.
3) En comparant $\mathbb{E}[X^2Y^2]$ et $\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$, vérifier que les variables X et Y ne sont pas indépendantes et qu'elles sont corrélées.
4) Calculer $\mathbb{P}(Y + X = 0)$ et vérifier que le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien.

Exercice 5. La loi Log-normale est utilisée en linguistique pour modéliser le nombre de mots dans une phrase. On dit que X suit une loi Log-normale de paramètres m et $\sigma^2 > 0$ si $X = \exp(Y)$ avec Y de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1) En se ramenant à la loi $\mathcal{N}(0,1)$, déterminer la densité de probabilité de X.
2) Calculer de façon astucieuse l'espérance et la variance de X.
3) Si $Z = X^a$ avec $a > 0$, montrer que Z suit une loi Log-normale.
4) En déduire les moments entiers positifs de tous les ordres associés à X.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X a une loi stable si, pour tout entier $n \geq 1$ et pour toute suite $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X, il existe des constantes $a_n > 0$ et b_n telles que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad a_n X + b_n$$

suivent la même loi. Montrer que, si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$, alors X est de loi stable. Proposer un autre exemple de loi stable.

Exercice 7. Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire gaussien $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec

$$m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les lois des variables aléatoires X, Y, Z, $X + 3Y$ et $X + Y + Z$.
2) Déterminer les lois des vecteurs aléatoires $U = (X, Y)$ et $V = (2X - 5, 4Z + 6)$.

Exercice 8. Soit (X, Y) un couple de $\mathbb{R}^2$ ayant pour fonction caractéristique :

$$\varphi_{(X,Y)}(t) = \exp\left(it_1 - 4it_2 - t_1^2 + t_1 t_2 - \frac{1}{2}t_2^2\right) \qquad \forall t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Donner la loi du couple (X, Y) ainsi que ses lois marginales.

Exercice 9. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien de densité de probabilité définie pour $|r| < 1$ par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1 - r^2)}\right).$$

1) Déterminer son espérance m et sa matrice de covariance Γ.
2) Quelle est la loi du couple aléatoire $(X, Y - rX)$?
3) Quelle est la loi de la variable aléatoire

$$V = \frac{X^2 - 2rXY + Y^2}{(1 - r^2)}.$$

4) Calculer $\mathbb{E}[V]$ et $\mathbb{E}[V^2]$.