15/03/18

Correction du partiel de Probabilité

Exercice 1:

1) On définit l'evenement aléatoire suivant

$E_1 =$ " on tire une boule verte dans A et une boule rouge dans B. "

on a $E_1 =$ " après les deux tirages, A contient trois boules rouges et B contient une boule verte. "

$P(E_1) = P(\{$tirer une boule verte dans A$\} \cap \{$tirer une boule rouge dans B$\})$

$= P($"tirer une boule rouge dans B" | "tirer une boule verte dans A"$)\, P($"tirer une boule verte dans A"$)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

2) $E_2 =$ " on est revenu à la configuration initiale "

$= E_3 \dot{\cup} E_4$

avec $E_3 =$ " on tire une boule verte dans A et une boule verte dans B "

$E_4 =$ " on tire une boule rouge dans A et — rouge — "

Par les mêmes calculs qu'en 1 on trouve

$P(E_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et $P(E_4) = 1 \times \frac{2}{3}$

Donc $P(E_2) = 5/6$.

$\boxed{\text{Ou}}$

on remarque que $E_1 \dot{\cup} E_2 = \Omega$ Donc $P(E_2) = 1 - 1/6 = 5/6$.

3) $P(\text{"on tire une boule verte dans } A''\text{"} \mid E_2) = \dfrac{P(\text{"on tire une boule verte dans } A''\text{"} \cap E_2)}{P(E_2)}$

$$= \frac{P(E_3)}{P(E_2)} = \frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5}$$

Exercice 2 :

1) $\Omega = \{(l_1, l_2, c_1, c_2, c_3, l_3, l_4) \,/\, l_1, l_2, l_3, l_4 \in L \text{ et } c_1, c_2, c_3 \in C\}$

où L est l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet

C ——— 10 chiffres de 0 à 9.

Ω est fini donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

on prend la ~~loi unif~~ probabilité uniforme sur Ω pour P.

2) a) $\mathrm{Card}(\Omega) = \underbrace{26^2}_{\text{deux premières lettres}} \times \underbrace{10^3}_{\text{choix des 3 chiffres}} \times \underbrace{26^2}_{\text{choix des deux dernières lettres}}$

$$\mathrm{Card}(A) = \underbrace{26 \times 25}_{\text{lettres 1 et 2 sans remise}} \times \underbrace{10 \times 9 \times 8}_{\text{chiffres 1, 2 et 3 sans remise}} \times \underbrace{24 \times 23}_{\text{lettres 3 et 4 sans remises}}$$

$$P(A) = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 9 \times 8}{26^3 \times 10^2} = 0{,}57$$

b) $\mathrm{Card}(B) = \underbrace{26 \times 26}_{\text{choix libre lettres 1 et 2}} \times \underbrace{10 \times 10}_{\text{choix libres chiffres 1 et 2}} \times \underbrace{1 \times 1 \times 1}_{\text{chiffre et lettres fixées}}$

$$P(B) = \frac{1}{10 \times 26^2} = 0{,}00$$

4) $\mathrm{Card}(C) = \binom{4}{2} 25^2 \binom{3}{2} 9^2$

choix emplacement des A — choix des autres lettres — emplacement des O — choix de l'autre chiffre

$$P(C) = \frac{6 \times 25^2 \times 3 \times 9^2}{26^4 \times 10^3} = 0{,}02$$

Exercice 3 :

1) Il faut et il suffit que f soit positive et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

Donc nécessairement $a > 0$ et

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} a x^2\,dx = \left[\frac{a x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{a}{3}(1-(-1)) = a\,\frac{2}{3}$$

Donc $a = \frac{3}{2}$.

2) $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) = P(X \leq t)$

Comme f est nulle en dehors de $[-1,1]$, X prend ses valeurs dans $[-1,1]$ et donc

$F_X(t) = 0$ pour $t < -1$

$F_X(t) = 1$ pour $t \geq 1$

Soit $t \in [-1,1[$,

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = a\int_{-1}^{t} x^2\,dx = \left[\frac{a x^3}{3}\right]_{-1}^{t} = \frac{a}{3}(t^3+1) = \frac{t^3+1}{2}$$

$$\text{Donc } F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ \frac{t^3+1}{2} & t \in [-1,1] \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

3) Y v.a. à valeurs dans $[0,1]$. On calcule sa fonction de répartition :

$F_Y(t) = 0$ si $t < 0$

$F_Y(t) = 1$ si $t \geq 1$

si $t \in [0,1[$,

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$$

$$= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) \quad (X \text{ est à densité})$$

$$= \frac{(\sqrt{t})^3+1}{2} - \frac{(-\sqrt{t})^3+1}{2} = t^{3/2}$$

Donc $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^{3/2} & t \in [0,1[\\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$

On remarque que F_Y est continue dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, donc Y est une v.a. à densité.

Exercice 4 :

1) Z variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (car $2Y-1$ à valeurs dans $\{-1,1\}$)

pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z=k) = P(X=k \text{ et } Y=1) = P(X=k)P(Y=1) \quad (\text{indépendance})$$

$$= p\, \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$,

$$P(Z=k) = P(X=-k \text{ et } Y=-1) = P(X=-k)P(Y=-1)$$

$$= (1-p)\, \frac{e^{-\lambda}\lambda^{-k}}{(-k)!}$$

enfin $P(Z=0) = P(X=0) = e^{-\lambda}$

2) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[2Y-1]\,\mathbb{E}[X]$ par indépendance

$\mathbb{E}[2Y-1] = 2\mathbb{E}[Y]-1 = 2p-1$ car $Y \sim \mathcal{B}(p)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Donc $\mathbb{E}[Z] = (2p-1)\lambda$

$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[(2Y-1)^2 X^2] = \mathbb{E}[X^2]$ car $(2Y-1)^2 = 1$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{k^2 \lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}(k+1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{k\lambda^k}{k!}}_{=\mathbb{E}[X]} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{=1}\Big)$$

$$= \lambda(\lambda+1)$$

Donc $\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \lambda(\lambda+1) - (2p-1)^2\lambda^2 = 4p(1-p)\lambda^2 + \lambda$

(En particulier on a bien $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X)$ lorsque $p=0$ ou $p=1$!)

3) prenons $P(Z=0, X=1) = P(X=0, X=1) = 0$

Or $P(Z=0) = e^{-\lambda} > 0$ et $P(X=1) = e^{-\lambda}\lambda > 0$ donc Z et X ne sont pas indépendantes.

$Z^2 = X^2$ Donc Z^2 et Y sont indépendantes car X et Y sont indépendantes.