Correction Partiel

Exercice 2 :

1) On suppose que le tirage des trois flacons se fait simultanément.

on note $E = \{e_1, \dots e_{18}\}$ l'ensemble des 18 flacons de sang numérotés

$\Omega = \{(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}) \,/\, 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 18\}$

(Rem : si on tient compte de l'ordre on a alors

$\tilde{\Omega} = \{(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}) \,/\, i_1 \neq i_2 \neq i_3 \text{ et } (i_1, i_2, i_3) \in [\![1, 18]\!]^3\}$)

Ω est fini donc on peut prendre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Enfin les tirages sont équiprobables donc P est la loi probabilité uniforme sur Ω.

nb : $\text{Card}(\Omega) = C_{18}^3$ nb de parties à 3 éléments dans un ensemble à 18 éléments.

2) a) Il n'y a que les groupes O et A qui ont au moins 3 flacons

donc $P(\text{"3 flacons du même groupe"}) = P(\text{"3 flacons O"}) + P(\text{"3 flacons A"})$

$$= \frac{C_{11}^3}{C_{18}^3} + \frac{C_4^3}{C_{18}^3}$$

b) $P(\text{"Au moins 1 flacon A"}) = 1 - P(\text{"aucun flacon A"}) = 1 - \dfrac{C_{14}^3}{C_{18}^3}$

car il y a 14 flacons qui ne sont pas du groupe A.

②

c) $P(\text{"3 groupes} \neq \text{"}) = P(\text{"groupes O, A et B"}) + P(\text{"groupes O, A et AB"})$

$+ P(\text{"groupes O, B et AB"}) + P(\text{"groupes A, B et AB"})$

$$= \frac{11\times 4\times 2}{C_{18}^3} + \frac{11\times 4\times 1}{C_{18}^3} + \frac{11\times 2\times 1}{C_{18}^3} + \frac{4\times 2\times 1}{C_{18}^3}$$

Exercice 3

1) <u>première méthode</u> : $X(\Omega) = \{0,1\}$ $\quad Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$

donc $(X+Y)(\Omega) = [\![0,n+1]\!]$

Soit $k \in [\![0,n+1]\!]$

$$P(X+Y=k) = P(X=0, Y=k) + P(X=1, Y=k-1)$$

$$= \begin{cases} P(X=0)P(Y=0) = (1-p)^{n+1} & \text{si } \underline{\underline{k=0}} \\ \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ P(X=1)P(Y=n) = p^{n+1} & \text{si } \underline{\underline{k=n+1}} \\ \text{par indépendance de } X \text{ et } Y. \end{cases}$$

Si $k \in [\![1,n]\!]$

$$P(X+Y=k) = P(X=0)P(Y=k) + P(X=1)P(Y=k-1)$$

$$= (1-p)C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + p\, C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n+1-k}$$

$$= (C_n^k + C_n^{k-1}) p^k (1-p)^{n+1-k}$$

$$= C_{n+1}^k p^k (1-p)^{n+1-k}$$ d'après la formule du triangle de Pascal.

donc $X+Y \sim \mathcal{B}(n+1, p)$

2ème méthode :

Y a même loi que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_1, \dots X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$.

X et Y sont indépendantes donc $X, X_1, \dots X_n$ indépendantes.

$X+Y = \sum_{i=1}^{n} X_i + X$ somme de $n+1$ v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, donc

$X+Y \sim \mathcal{B}(n+1, p)$.

2) $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

si $k \neq 0$, $P(Z=k) = P(XY=k) = P(X=1, Y=k)$

$$= P(X=1)P(Y=k) \text{ par indépendance}$$
$$= p\, C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= C_n^k p^{k+1} (1-p)^{n-k}$$

et $P(Z=0) = P(X=0 \text{ ou } Y=0) = P(\{X=0\} \dot\cup \{Y=0, X\neq 0\})$

$$= P(X=0) + P(Y=0, X\neq 0)$$
$$= (1-p) + P(Y=0)P(X\neq 0) = (1-p) + (1-p)^n p$$

3) Z v.a. bornée donc $\mathbb{E}[Z]$ et $Var(Z)$ bien définies.

$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}(XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ par indépendance

$$= p \times np = np^2.$$

$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y^2]$

$$= p \times (Var(Y) + \mathbb{E}[Y]^2) = p \times (np(1-p) + (np)^2)$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = n p^2(1-p) + n^2 p^3 - n^2 p^4$$
$$= n p^2(1-p) + n^2 p^3 (1-p)$$
$$= n p^2 (1-p)(1 + n p)$$

4) $\mathbb{P}(T=0, Z=0) = \mathbb{P}(X+Y=0, XY=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0)$
$= (1-p)^{n+1}$ par indépendance

5) $\mathbb{P}(T=0, Z=0) = \mathbb{P}(T=0) \neq 0$ si $\underline{\underline{p \neq 1}}$.

or $\mathbb{P}(Z=0) < 1$ si $p \neq 0$

Donc $\mathbb{P}(T=0, Z=0) \neq \mathbb{P}(T=0)\mathbb{P}(Z=0)$ et ainsi T et Z ne sont pas indépendants.

Si $p = 0$, $X = 0 = Y$ constantes donc indépendants.

Si $p = 1$, $X = 1$, $Y = n$ — ———

Exercice 4 :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(X_B = k) = C \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = C\left(1 - \frac{1}{K+1}\right)$

somme télescopique.

Donc $\displaystyle 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_B = k) = C \lim_{K \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{K+1}\right) = C$

i.e. $\underline{C = 1}$. Avec $C = 1$, on a également $\mathbb{P}(X_B = k) > 0$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

2) $\mathbb{E}[X_A]$ existe car X_A v.a. positive.

$$\mathbb{E}[X_A] = \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k'=0}^{+\infty} (k'+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'}}{k'!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k'=0}^{+\infty} k' e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'}}{k'!}}_{= \lambda \sum_{k''=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k''}}{k''!}} + \underbrace{\sum_{k'=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'}}{(k')!}}_{=1} = \lambda + 1.$$

$$\mathbb{E}[X_\lambda^2] = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k'=0}^{+\infty} (k'+1)^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k'=0}^{+\infty} (k')^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'}}{(k')!}}_{= \lambda \underbrace{\sum_{k'=1}^{+\infty} k' e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'-1}}{(k'-1)!}}_{= \mathbb{E}[X_\lambda] = \lambda+1}} + \underbrace{2 \sum_{k'=0}^{+\infty} k' e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'}}{(k')!}}_{= 2\lambda \text{ (calcul précédent)}} + \underbrace{\sum_{k'=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k'}}{(k')!}}_{=1}$$

$$= \lambda(\lambda+1) + 2\lambda + 1$$

$$\mathrm{Var}(X_\lambda^2) = \lambda^2 + 3\lambda + 1 - (\lambda+1)^2 = \lambda$$

—

X_B v.a. positive donc $\mathbb{E}[X_B]$ existe.

$$\mathbb{E}[X_B] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$$

terme général série divergente.

3/a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$k \in \mathbb{N}^*$,

$P(X=k) = P(X=k \mid \text{université } A)\, P(\text{Université } A) + P(X=k \mid \text{Université } B)\, P(\text{Université } B)$

d'après la formule des probabilités totales.

$$P(X=k) = P(X_A=k)\,\frac{1}{2} + P(X_B=k)\,\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$$

b) $$P(\text{Université A} \mid X=k) = \frac{P(\text{Université A et } X=k)}{P(X=k)}$$

$$= \frac{P(X=k \mid \text{Université A})\,P(\text{Université A})}{P(X=k)}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}{\cancel{\frac{1}{2}}\left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]}$$