Maths Fonda
Inge Maths
CMI ISI
L3 Proba

Correction Partiel

Exercice 1 :

1) $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{P, F\},\ 1 \leq i \leq 5\}$

x_i correspond au résultat du lancer i.

on a $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^5$

On peut supposer que les lancer sont indépendants et donc tous les résultats sont équiprobable (~~la~~ ~~pièce~~ pièce est équilibrée) :

on prend donc la probabilité uniforme sur Ω.

2) $A =$ "on obtient exactement une fois Face".

$A = \bigcup_{i=1}^{5} A_i$ avec $A_i =$ "on obtient Face au lancer i et Pile pour les autres lancers".

donc $P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i)$ (union disjointe)

or $\mathrm{Card} A_i = 1$ donc $P(A_i) = \frac{1}{2^5}$ et $\boxed{P(A) = \frac{5}{2^5}}$

$B =$ "on obtient au moins une fois Face"

$\underline{P(B)} = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\{P, P, P, P, P\}) = \underline{1 - \frac{1}{2^5}}$

②

C = "on obtient Pile au premier tirage ou Face au troisième tirage"
$= C_1 \cup C_3$ avec C_1 = "Pile au premier tirage")
C_3 = "Face au troisième tirage".

$$P(C) = P(C_1) + P(C_3) - P(C_1 \cap C_3) = \frac{1 \times 2^4}{2^5} + \frac{1 \times 2^4}{2^5} - \frac{2^3}{2^5} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{3}{4}}$$

D = "on obtient une série d'au moins trois Pile ou trois Face."

pour obtenir une série de longueur au moins trois, il faut qu'elle commence en première, deuxième ou troisième position : i.e. on doit avoir

$$\underbrace{\begin{matrix} PPP\times\times \\ FFF\times\times \end{matrix}}_{\text{debut en 1ère position}} \quad \underbrace{\begin{matrix} PFFF\times \\ FPPP\times \end{matrix}}_{\text{debut en 2ème position}} \quad \underbrace{\begin{matrix} \times PFFF \\ \times FPPP \end{matrix}}_{\text{debut en 3ème position}}$$

(les $\times$ indiquent que l'on peut avoir P ou F).

Ainsi $P(D) = \dfrac{2\times2 + 2\times2 + 2+2 + 2+2}{2^5} = \dfrac{2^4}{2^5} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 2:

1) On a $P(X=1) + P(X=-1) = 1$ Donc $P(X=-1) = 1-p \in]0,1[$

③

2) $\mathbb{E}[X] = 1 \times \mathbb{P}(X=1) + (-1) \times \mathbb{P}(X=-1) = 2p-1$

$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[1] = 1 \qquad (\text{car } X^2 = 1)$

Donc $Var(X) = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p)$

3) $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-1,1\}$ donc $Z(\Omega) = \{-1,1\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=-1, Y=-1) \\ &= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=-1) \quad \text{par indépendance} \\ &= p^2 + (1-p)^2 = 1 + 2p^2 - 2p \end{aligned}$$

~~$\mathbb{P}(Z=-1)=$~~ Donc $Z \sim \mathcal{R}(1+2p^2-2p)$

(en particulier on a $\mathbb{P}(Z=-1) = 2p(1-p)$)

4) Remarquons que $\mathbb{P}(Z=1) = 1+2p^2-2p \neq 0$ (fonction de p minimale en $p = 1/2$ ...)

$$\mathbb{P}(X=1 \mid Z=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Z=1)}{\mathbb{P}(Z=1)} = \frac{\mathbb{P}(X=1, XY=1)}{\mathbb{P}(Z=1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(Z=1)} = \frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}$$

5) ~~On~~ Notons $T_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$ comme $X_i(\Omega) = \{-1,1\}$ on a $T_n(\Omega) = \{-1,1\}$

donc T_n est une v.a. qui suit une loi de Rademacher.

il suffit de calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$ pour avoir son paramètre.

$T_n = 1$ ssi il y a un nombre ~~impair~~ pair de (-1) parmi les X_i.

Donc $\displaystyle P(T_n=1) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P(2k \text{ valeurs } (-1) \text{ parmi les } (X_i))$

$$\boxed{P(T_n=1) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2k} (1-p)^{2k} p^{n-2k} = p_n}$$

et $\underline{T_n \sim \mathcal{B}(p_n)}$

Exercice 3:

1) X est une v.a. discrète donc F_X est une fonction en escalier qui "saute" seulement aux points de $\{1, .., n\}$

$$\boxed{F_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq n \text{ car } X \leq n \\ 0 & \text{si } t < 1 \text{ car } X \geq 1 \end{cases}}$$

si $t \in [0, n[$,

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P(X \leq \lfloor t \rfloor) = \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} P(X=i)$$

$$= \frac{\lfloor t \rfloor}{n}$$

2) $Z(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$

$P(Z=0) = P(Y=0) = 1-p$

$P(Z=i) = P(Y=1, X=i) = P(Y=1)P(X=i) = \frac{p}{n}$ car X et Y indépendantes

pour $i \in \{1, .., n\}$

Exercice 4:

3) $\mathbb{P}(Z=2, Y=1) = \mathbb{P}(XY=2, Y=1) = 0$

or $\mathbb{P}(Z=2) \neq 0$ si $p \neq 0$

et $\mathbb{P}(Y=1) \neq 0$

Donc Z et Y ne sont pas indépendantes si $p \neq 0$

Si $p=0$, $Z=0$ constante donc Z et Y indépendantes.

4) $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$

$\mathbb{E}[Y] = p \times 1 = p$

$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \frac{p(n+1)}{2}$ car X et Y indépendantes

Exercice 5:

1) On doit avoir $f \geq 0$ (p.p.) et $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

donc $c \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} c e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{]\theta,+\infty[}(x)dx = c\int_{\theta}^{+\infty} e^{-(x-\theta)}dx$

$= c\left[-e^{-(x-\theta)}\right]_{\theta}^{+\infty} = c$

i.e. $\boxed{c=1}$.

2) $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta,+\infty[}(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } t<\theta \\ \int_{\theta}^{t} e^{-(x-\theta)}dx = 1-e^{-(t-\theta)} & \text{si } t\geq\theta \end{cases}$