| | | |
|---|---|---|
| université de BORDEAUX | **ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017**<br><br>**EXAMEN FINAL : SESSION 2**<br><br>**Parcours : M1 MSS** **Code UE : 4TMS706U**<br>**Épreuve : Probabilités et Statistique**<br>**Date : 13/12/17** **Heure : 9h** **Durée : 3h**<br>**Documents :** non autorisés<br>**Calculatrice :** calculatrice non autorisée<br>Épreuve de MM. GENADOT et RICHOU | **Collège Sciences et Technologies** |

**Exercice I.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité donnée, pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta,\infty[}(x),$$

avec $\theta$ un paramètre réel, on note $\mathbb{P}_\theta$ cette loi. On considère le modèle $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n$-échantillon associé, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $\hat{\theta}_n$, l'estimateur du maximum de vraisemblance associé au modèle $\mathcal{P}$.
2. Montrer que $\hat{\theta}_n$ a même loi que $\theta + \frac{1}{n}E$ où $E$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
3. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur biaisé de $\theta$ qui converge en moyenne quadratique vers $\theta$. Calculer son risque quadratique.
4. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur fortement convergent de $\theta$.
5. Construire un intervalle de confiance au niveau 95% pour $\theta$ de la forme $[g(n, \hat{\theta}_n), \hat{\theta}_n]$ où $g$ est une fonction que l'on explicitera.
6. On s'intéresse à un deuxième estimateur de $\theta$ donné par $\tilde{\theta}_n := \bar{X}_n - 1$ avec $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Calculer son risque quadratique. Est-ce qu'un de ces deux estimateurs est préférable à l'autre ?

Soit maintenant $Y$ une variable aléatoire réelle de densité donnée, pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta,\infty[}(x),$$

avec $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}\times]0, \infty[$, on note $\mathbb{P}_{\theta,\lambda}$ cette loi. On considère le modèle $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_{\theta,\lambda} : (\theta, \lambda) \in \mathbb{R}\times]0, \infty[\}$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ un $n$-échantillon associé, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Montrer que $Y$ a même loi que $\theta + \frac{1}{\lambda}E$ où $E$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. Calculer les deux premiers moments de $Y$.
8. En déduire un estimateur fortement convergent de $(\theta, \lambda)$ à partir de l'échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

**Exercice II.** On considère le modèle uniforme $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta = \mathcal{U}([\theta, \theta + 1]) : \theta \in \mathbb{R}\}$. On note $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n$-échantillon associé.

1. Montrer qu'il existe une infinité d'estimateurs du maximum de vraisemblance associés au modèle $\mathcal{P}$.

On considère alors, pour $t \in [0,1]$, l'estimateur

$$\hat{\theta}_n(t) = t(\max_{1 \leq i \leq n} X_i - 1) + (1-t) \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

2. Montrer que $X_i - \theta$ a même loi que $U$ avec $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. Montrer également que $U$ et $1-U$ ont même loi.
3. En déduire que $\min_{1 \leq i \leq n} X_i - \theta$ et $\theta + 1 - \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ ont même loi.
4. Montrer que $\min_{1 \leq i \leq n}(X_i - \theta) = \min_{1 \leq i \leq n} X_i - \theta$ est une variable aléatoire continue de densité
$$f(x) = n(1-x)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$
5. Parmi la famille d'estimateurs $\{\hat{\theta}_n(t) : t \in [0,1]\}$, en existe-t-il un sans biais ? On pourra calculer explicitement le biais ou bien donner un argument théorique direct.

**Exercice III.** On joue à pile ou face avec une pièce de monnaie tombant sur pile avec probabilité $p \in ]0,1[$. On considère que « faire pile » est un succès. On note $X_r$ la loi du $r$-ième succès, avec $r \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{P}_p$ la loi de $X_r$ et on considère le modèle $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_p : p \in ]0,1[\}$.

1. Montrer que $X_r$ est à valeurs dans $\{n \in \mathbb{N}^* : n \geq r\}$ et que pour $n \geq r$ on a
$$\mathbb{P}(X_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$
2. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{C}$ tels que $|x| < 1$ on a
$$\sum_{n=r}^{+\infty} (n-1)(n-2)...(n-r+1)x^{n-r} = (r-1)! \left(\frac{1}{1-x}\right)^r.$$
Pour $r = 1$, la convention est $(n-1)(n-2)...(n-r+1) = 1$.
3. En déduire la fonction caractéristique de $X_r$.
4. Comment appelle-t-on la loi de $X_1$ ? Soit $(Y_1, \dots, Y_r)$ un $r$-échantillon associé à la loi de $X_1$. Expliquer pourquoi $X_r$ a même loi que $Y_1 + \dots + Y_r$.
5. En déduire que
$$\mathbb{E}(X_r) = \frac{r}{p}, \quad \mathrm{Var}(X_r) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$
et recalculer la fonction caractéristique de $X_r$ par une autre méthode.

6. On suppose dans cette question (et uniquement dans cette question) que $p = \frac{r}{\lambda + r}$ avec $\lambda > 0$ un paramètre fixé. Montrer que $X_r - r$ converge en loi lorsque $r$ tend vers $+\infty$. On pourra se contenter de donner la fonction caractéristique de la loi limite.
7. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}_n$ de $p$ associé au modèle $\mathcal{P}$.
8. Quelle-est l'information de Fisher associée à ce modèle ?
9. Montrer que $\hat{p}_n$ est un estimateur fortement convergent.

**Exercice IV.** Soit $(X, Y)$ un vecteur gaussien centré, avec $\mathbb{E}[X^2] = 4$ et $\mathbb{E}[Y^2] = 1$, et tel que les variables $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Déterminer la matrice de covariance de $(X, Y)$.
2. Est-ce que le vecteur aléatoire $(X, Y)$ est à densité ?
3. Montrer que le vecteur $(X + Y + 1, 2X - Y)$ est également gaussien, puis déterminer ses paramètres. Est-ce que $X + Y + 1$ et $2X - Y$ sont indépendantes ?