21/10/2019

Correction du CC de Probabilités & Statistique

1

Exercice 1

1) On doit avoir $\begin{cases} P(X=k) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \text{et } \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1 \end{cases}$ pour avoir une loi de probabilité.

Donc $C_\alpha \geq 0$ et $C_\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha k} = 1$

$$\iff C_\alpha \frac{1}{1-e^{-\alpha}} = 1 \quad \text{car } |e^{-\alpha}| < 1$$

$$\iff \boxed{C_\alpha = 1 - e^{-\alpha}}$$

2) $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} C_\alpha e^{-\alpha k} = C_\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{it-\alpha})^k$

$$\boxed{\phi_X(t) = \frac{C_\alpha}{1-e^{it-\alpha}}} \quad \text{car } |e^{it-\alpha}| = |e^{-\alpha}| < 1$$

3) ϕ_X est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

$$\phi_X'(t) = \frac{C_\alpha i e^{it-\alpha}}{(1-e^{it-\alpha})^2} = C_\alpha i \left[\frac{1}{(1-e^{it-\alpha})^2} - \frac{1}{1-e^{it-\alpha}}\right]$$

$$\phi_X'(0) = C_\alpha i \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} = \frac{i e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}$$

Donc X intégrable et $\mathbb{E}[X] = -i\,\phi_X'(0) = \dfrac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}$

$$\phi_X''(t) = C_\alpha i \left[\frac{2ie^{it-\alpha}}{(1-e^{it-\alpha})^3} - \frac{ie^{it-\alpha}}{(1-e^{it-\alpha})^2}\right]$$

$$\phi_X''(0) = -C_\alpha \left[\frac{2e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^3} - \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}\right] = e^{-\alpha}\left[\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{2}{(1-e^{-\alpha})^2}\right]$$

$$= -e^{-\alpha}\,\frac{1+e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}$$

Donc X de carré intégrable et $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X''(0) = e^{-\alpha}\,\dfrac{1+e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{e^{-\alpha}(1+e^{-\alpha})}{(1-e^{-\alpha})^2} - \frac{e^{-2\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} = \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} \quad (>0!)$$

4) On a des variables discrètes donc la vraisemblance s'écrit

$$L(\alpha; x_1, .. x_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\alpha})e^{-\alpha x_i} = (1-e^{-\alpha})^n e^{-\alpha\sum_{i=1}^n x_i}$$

On passe à la log vraisemblance :

$$\ell(\alpha) = \log(L(\alpha; x_1, .. x_n)) = n\log(1-e^{-\alpha}) - \alpha\sum_{i=1}^n x_i$$

ℓ est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\ell'(\alpha) = 0 \iff \frac{ne^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff e^{-\alpha} = \frac{\bar{X}_n}{1+\bar{X}_n} \quad \text{avec } \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\iff \alpha = -\log\left(\frac{\bar{X}_n}{1+\bar{X}_n}\right) \quad (\text{on a supposé } \bar{X}_n > 0\,!)$$

a un point critique. De plus $\ell''(\alpha) = \dfrac{-ne^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} < 0$ donc la fonction est concave : la ~~f~~ fonction ℓ atteint son maximum global au point critique.

estimateur du maximum de vraisemblance : $\hat{\alpha}_n^{MV} = -\log\left(\dfrac{\bar{X}_n}{1+\bar{X}_n}\right)$

Estimateur du maximum de vraisemblance : $\boxed{\hat{\alpha}^{MV}_{n} = \log\left(\dfrac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}{1+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right)}$ ③

<u>Remarque</u> : $\hat{\alpha}^{MV}_{n}$ n'est pas défini correctement lorsque $X_1 = \dots = X_n = 0$ qui est un événement de probabilité non nulle !.

<u>Exercice II</u>

1/a) C'est la loi du nombre de succès lorsque l'on réalise ~~m~~ expériences indépendantes, chaque expérience ayant une probabilité p de succès. Ici une expérience correspond à "pêcher un poisson" et on considère qu'il y a succès lorsque ce poisson n'est pas un ~~brochet~~. On peut supposer qu'il y a bien indépendance entre chaque poisson pêché.

Ici $p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \quad (= 0{,}5 + 0{,}3)$

donc le nb de poissons pêchés qui ne sont pas des brochets suit une loi $\mathcal{B}(m ; 0{,}8)$.

b) De même $X \sim \mathcal{B}(m ; 0{,}3)$

donc $P(X=3) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 3 \\ C_m^3 (0{,}3)^3 (0{,}7)^{m-3} & \text{si } m \geq 3 \end{cases}$

c) $Y \sim \mathcal{B}(n ; 0{,}3)$

$\mathbb{E}[Y] = 0{,}3\, n = 50 \times 0{,}3 = 15$

d) $X+Y$ représente ~~le nb~~ le nombre de carpes pêchées par Didier et Jeanne. Elle suit une nouvelle fois la loi du nombre de succès lorsque l'on réalise $M+n$ expériences ~~d~~ indépendantes, chaque expérience ayant une probabilité p de succès.

Ici on suppose l'indépendance entre chaque poisson pêché et entre les poissons pêchés par Didier et Jeanne.

$$X+Y \sim \mathcal{B}(n+m\,;\,0{,}3)\ .$$

e) Si Jeanne et Didier pêchent en même temps et au même endroit, l'indépendance est peu réaliste : il y aura certainement une forte corrélation entre les poissons pêchés par Jeanne et Didier.

2) C'est la loi du premier succès lorsque l'on réalise une expérience plusieurs fois de suite de façon indépendante jusqu'à l'obtention du premier succès. Ici l'expérience consiste à pêcher un poisson et un succès correspond à la pêche d'un brochet : $p=0{,}2$.
on obtient la loi $\mathcal{G}(0{,}2)$.

Exercice III :

1) $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$, X et Y indépendantes donc $(X,Y) \sim \mathcal{U}([0,1]\times[0,1])$
i.e. (X,Y) est à densité, de densité $f_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y)$

2) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ mesurable

$$\mathbb{E}[\varphi(U,V)] = \mathbb{E}[\varphi(XY,Y)] = \iint_{]0,1[\times]0,1[} \varphi(xy,y)\,dx\,dy$$

On fait le changement de variable :

$$h :]0,1[\times]0,1[\longrightarrow \mathcal{D}$$
$$(x,y) \longmapsto (u,v) = (xy,y)$$

h et h^{-1} sont $\mathcal{C}^1$,
donc h est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

on a $h^{-1} : \mathcal{D} \longrightarrow]0,1[\times]0,1[$
$$(u,v) \longmapsto \left(\frac{u}{v}, v\right)$$

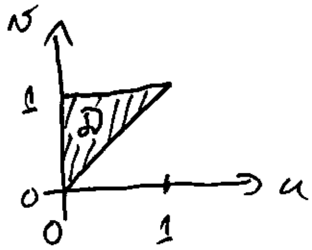
$$|\text{Jac } h^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$$

Donc $\mathbb{E}[\varphi(U,V)] = \iint_{\mathcal{D}} \varphi(u,v)\frac{1}{v}\,du\,dv = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(u,v)\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(u,v)}{v}\,du\,dv$

et ainsi (U,V) est un vecteur aléatoire à densité, de densité $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(u,v)}{v}$.

3) $V=Y$ donc $V \sim \mathcal{U}([0,1])$

U est une v.a. à densité, de densité $f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(u,v)}{v}\,dv$



Donc $f_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin]0,1[\\ \int_u^1 \frac{1}{v}\,dv = -\log u & \text{si } u \in]0,1[\end{cases}$

4) U et V ne sont pas indépendants car $\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(u,v)}{v} \neq \frac{-\log u}{v}\mathbb{1}_{]0,1[\times]0,1[}(u,v)$.

(en particulier, les indicatrices ne correspondent pas !).

Exercice IV :

1) $f_{\lambda,\alpha}$ est une densité ssi $\begin{cases} f_{\lambda,\alpha} \geq 0 \ (\text{p.p.}) \\ \int_{\mathbb{R}} f_{\lambda,\alpha}(t) = 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} C_{\lambda,\alpha} \geq 0 \\ \int_0^\alpha C_{\lambda,\alpha} e^{-\lambda x}\,dx = 1 \end{cases}$

Donc $C_{\lambda,\alpha}\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\alpha = 1$ i.e. $C_{\lambda,\alpha}\frac{1-e^{-\lambda\alpha}}{\lambda} = 1 \iff \boxed{C_{\lambda,\alpha} = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\alpha}}}$

2) On est dans le cadre des v.a. à densité, donc la vraisemblance est donnée par

$$L(\alpha; x_1, \dots x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\lambda,\alpha}(x_i) = \left(\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\alpha}}\right)^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(x_i)$$

Or $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(x_i) = \mathbb{1}_{0 \leq \sup x_i \leq \alpha}$

Donc $L(\alpha; x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\left(\dfrac{\lambda}{1-e^{-\lambda\alpha}}\right)^{n}}_{g(\alpha)} \mathbb{1}_{\sup x_i \leq \alpha} = \begin{cases} g(\alpha) & \text{si } \sup x_i \leq \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha < \sup x_i \end{cases}$

Or $g(\alpha)$ est une fonction décroissante en α (sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Donc $L(\alpha; x_1, \dots x_n)$ est maximale lorsque g est maximale sur $[\sup_{i \in [\![1,n]\!]} x_i, +\infty[$

i.e. $\hat{\alpha}_n^{MV} = \sup_{i \in [\![1,n]\!]} (x_i)$ estimation du maximum de vraisemblance.

$\sup_{i \in [\![1,n]\!]} (X_i)$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance.

3) La nouvelle vraisemblance est donnée par

$L(\lambda; x_1, \dots x_n) = \underbrace{\left(\dfrac{\lambda}{1-e^{-1}}\right)^{n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}}_{g(\lambda)} \mathbb{1}_{\{\sup x_i \leq 1/\lambda\}} = \begin{cases} g(\lambda) & \text{si } \sup x_i \leq 1/\lambda \text{ i.e. } \lambda \leq \dfrac{1}{\sup x_i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On maximise $g(\lambda)$: il suffit de maximiser son log.

$f(\lambda) = \log(g(\lambda)) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n \log(1-e^{-1})$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f'(\lambda) = \dfrac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad f'(\lambda) = 0 \iff \lambda = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^{-1} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$f''(\lambda) = -\dfrac{n}{\lambda^2} < 0$ donc la fonction est concave

λ	0		$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^{-1}$		$+\infty$
g		$\nearrow$		$\searrow$	

or $\dfrac{1}{\sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} x_i} \leq \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$ (car $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq n \sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$)

donc sur $\left]0, \dfrac{1}{\sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} x_i}\right]$, g est maximale en $\dfrac{1}{\sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} x_i}$

Ainsi $\lambda_n^{MV} = \dfrac{1}{\sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} x_i}$

et l'estimateur du maximum de vraisemblance est donné par $\dfrac{1}{\sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} X_i}$.