Master MSS
Université de Bordeaux
2019/2020

Chaînes de Markov

FICHE D'EXERCICES N°1

Exercice 1. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que P et Q sont des matrices stochastiques et représenter leur graphe associé.

Exercice 2. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition P telle que $X_0 = 1$. Calculer

1. $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)$
2. $\mathbb{P}(X_2 = 1)$
3. $\mathbb{P}(X_{10} = 1|X_8 = 1,X_3 = 2)$
4. $\mathbb{P}(X_{10} = 1,X_8 = 1|X_6 = 2,X_3 = 2)$

Exercice 3. Soit P la matrice définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} P_{5n,5n+1} = P_{5n+1,5n+2} = P_{5n+2,5n+3} = P_{5n+3,5n+4} = 1 \\ P_{5n+4,5n+5} = P_{5n+4,5n} = 1/2 \end{cases}$$

Montrer que P est une matrice stochastique et donner son graphe associé.

Exercice 4. Soit X_n le minimum obtenu en jetant n fois un dé équilibré à six faces. Montrer que la suite (X_n) est une chaîne de Markov homogène et donner son espace d'états, sa matrice de transition et le graphe correspondant.

Exercice 5. **Le modèle de diffusion d'Ehrenfest** (Ce modèle a été proposé en 1907 afin de décrire, en terme de physique statistique, les échanges de chaleur entre deux systèmes portés initialement à une température différente).

Deux urnes A et B contiennent, à elles deux, a boules numérotées de 1 à a. À l'instant 0 on suppose que l'urne A contient X_0 boules, où X_0 est une variable aléatoire. À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit un nombre de 1 à a avec une probabilité $1/a$ de façon indépendante des choix précédents et de X_0. Si ce nombre est i, on change d'urne la boule numérotée i. On note X_n le nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, et déterminer l'ensemble de ses états.

2. Déterminer la matrice de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le graphe associé.
3. On suppose que pour $j \in \{0,\dots a\}$, $\mathbb{P}(X_0 = j) = 2^{-a}\binom{a}{j}$. Calculer la loi de X_1, puis la loi de X_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6. Soit (X_n) une chaîne de Markov sur $E = \{a,b,c\}$ de loi initiale la mesure uniforme sur E et de matrice de transition P :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la loi de la chaîne au temps n.

Exercice 7. Soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

1. Poser
$$P^n = \begin{pmatrix} a_n & 1-a_n \\ b_n & 1-b_n \end{pmatrix}$$
et calculer directement P^n (en faisant apparaître des suites arithmético-géométriques).
2. En déduire que P^n converge vers une matrice que l'on appellera P_∞.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $Q_\infty = P_\infty^t$.
4. Que vaut
$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad P?$$
5. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $Q = P^t$.
6. On considère (X_n) la chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale $\mu_0 = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha,\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Calculer la loi de la chaîne au temps n.

Exercice 8. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Calculer P^n (ou plutôt Q^n avec $Q = P^t$) en diagonalisant la matrice Q.

Exercice 9. Démontrer la Propriété suivante :

Propriété (Proposition 4.1 du cours). Soient E et F deux ensembles au plus dénombrables. On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ sont trois suites telles que :

(i) pour tout entier $n \geq 0$, f_n est une fonctions définie sur $E \times F$ et à valeurs dans E,

(ii) $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes, à valeurs dans F,

(iii) X_0 est une v.a. à valeurs dans E et qui est indépendante de la suite $(Y_n)_n$,

(iv) et on a : $X_{n+1} = f_n(X_n, Y_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.