Master MAS
Université de Bordeaux
2019-2020

Chaînes de Markov

FICHE D'EXERCICES N°3

Exercice 1. On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P définie par,

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le graphe correspondant, la nature et la période de chaque classe.
2. Soit π une probabilité invariante pour P, montrer que $\pi(4) = 0$.
3. Donner toutes les probabilités invariantes.

Exercice 2. Soit P une matrice stochastique sur un espace d'états E. On note F l'ensemble des états de E qui appartiennent à une classe fermée et $A = F^c$. Soit π une probabilité invariante. On suppose que tout état $y \in A$ conduit à un état $x \in F$. Le but de l'exercice est de montrer que π ne charge pas l'ensemble A.

1. Montrer que l'hypothèse est satisfaite si l'espace d'états E est fini.
2. Montrer que
$$\pi(A) := \sum_{y \in A} \pi(y) = \sum_{z \in A} \pi(z) \sum_{y \in A} P(z, y)$$
3. En déduire que si $z \in A$ conduit à $x \in F$ en un coup, alors $\pi(z) = 0$.
4. Montrer que si $z \to z'$ et $\pi(z') = 0$ alors $\pi(z) = 0$.
5. Conclure.

Exercice 3. On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P définie par,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le graphe correspondant ainsi que la nature et la période de chaque classe.
2. En déduire que P admet une unique probabilité invariante et la calculer.

3. Quelle sont les limites presque-sûres de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 \quad ?$$

4. Que peut-on dire de la loi de X_n lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 4. On considère la matrice sur l'espace d'état $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \end{pmatrix}.$$

1) A quelle condition sur a et b, la matrice P est-elle stochastique ?

2) Donner les classes communicantes. Préciser si elles sont récurrentes ou transientes. Donner leur période. (On séparera les cas $b = 0$ et $b > 0$.)

3) Justifier que la chaîne admet une unique mesure de probabilité invariante π. La calculer.

4) On cherche à maximiser (lorsque $n \to +\infty$) le temps passé par la chaîne dans l'état 5, que doit-on choisir comme valeur pour a et b ? (On explicitera le théorème utilisé.)

5) On note $\tau_1 := \inf\{p \geq 1, X_p = 1\}$. Que vaut $\mathbb{E}_1[\tau_1]$? (Commenter le résultat pour $b = 0$.)

6) On part de l'état 1, que peut-on dire sur la convergence de $\mathbb{P}_1(X_n = 5)$? (On séparera les cas $b = 0$ et $b > 0$.)

Exercice 5. Une chanteuse d'opéra doit donner une longue série de concerts. Son tempérament d'artiste la pousse à vouloir tous les soirs arrêter les concerts, et ce avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Une fois qu'elle a décidé d'arrêter, elle ne chantera pas de nouveau jusqu'à ce que son impresario la convainque de son admiration. Pour cela, il lui envoie des fleurs chaque jour jusqu'à ce qu'elle revienne. Des fleurs coûtant x milliers d'euros, $0 < x \leq 1$, amènent une réconciliation avec la probabilité $\sqrt{x}$. L'impresario fait 750 euros de bénéfice à chaque représentation donnée. Combien doit-il dépenser en fleurs ?

Exercice 6. (Algorithme de Metropolis-Hasting). On pose $D = \{1, \ldots, N\}^2$ (avec N grand) et on considère l'espace d'états $E = \{S : D \to \{+1, -1\}\}$. En physique, on est intéressé par la probabilité :

$$\pi(S) = \frac{e^{-\beta \sum_{i,j \in \{1,\ldots,N\}^2, j\sim i} S(i)S(j)}}{Z_\beta}, \text{ pour } S \in E$$

avec $\beta > 0$. Il est alors bien naturel de vouloir choisir une configuration S suivant π (i.e. de simuler suivant la loi π) ou bien de vouloir calculer $\sum_{S\in E} \pi(S)f(S)$. Le problème est que si N est grand, même sur ordinateur, il est illusoire de calculer la constante de normalisation Z_β ainsi que de faire la somme $\sum_{S\in E}$! On va donc utiliser ici une approche chaîne de Markov.

Pour simplifier on suppose qu'on connaît une matrice de transition Q sur E **symétrique** (i.e. vérifiant $Q(x,y) = Q(y,x), x, y \in E$) et $Q(x,x) = 0, x \in E$. On suppose de plus que Q est **irréductible**. On va alors construire une matrice de transition P admettant π pour mesure invariante. On construit $P(x,y)$ de la façon suivante. On est en x et on propose une valeur Y suivant la probabilité $Q(x,Y)$. On accepte à coup sûr cette proposition si $\pi(Y) \geq \pi(x)$. On l'accepte avec probabilité $\frac{\pi(Y)}{\pi(x)}$ si $\pi(Y) < \pi(x)$.

1. Montrer que l'on a, pour $x \neq y$

$$P(x,y) = \begin{cases} Q(x,y), & \text{si } \pi_y \geq \pi(x), \\ Q(x,y)\frac{\pi(y)}{\pi(x)} & \text{si } \pi_y < \pi(x) \end{cases}$$

et

$$P(x,x) = 1 - \sum_{z\neq x} P(x,z).$$

2. Montrer que π est une mesure **reversible** pour P, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x).$$

3. En déduire que π est une mesure **invariante** pour P.
4. Montrer que P est irréductible.
5. Proposer un algorithme pour calculer une valeur approchée de $\sum_{x\in E} \pi(x)f(x)$ pour f une fonction de E dans $\mathbb{R}$.
6. On suppose que π atteint son maximum en une unique configuration x^*. Montrer que P est apériodique.
7. Proposer un algorithme pour simuler suivant la loi π (en fait une loi proche de celle de π).