UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **MASTER 1, 2016/2017**
OUTILS DE SIMULATION

MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE

On considère des variables aléatoires $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ i.i.d. telles que $A_i(\Omega) \subset [0,1]$. Ces variables aléatoires définissent un environnement sur $\mathbb{Z}$. Pour un tirage $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ des v.a. $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, on considère alors la marche aléatoire $(X_i^\alpha)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} X_0^\alpha = 0 \\ \mathbb{P}(X_{i+1}^\alpha - X_i^\alpha = 1 | X_i^\alpha = k) = \alpha_k \\ \mathbb{P}(X_{i+1}^\alpha - X_i^\alpha = -1 | X_i^\alpha = k) = 1 - \alpha_k. \end{cases}$$

On se pose alors la question du comportement en temps long de cette marche aléatoire. Pour cela on introduit la quantité $\rho := (1 - A_0)/A_0$ et $\eta = \mathbb{E}[\log \rho]$. Le comportement asymptotique de la marche aléatoire est étroitement lié à la valeur de η. Dans la suite on s'intéresse au cas particulier $\eta < 0$: dans ce cas on a $X_n^\alpha \to +\infty$ p.s. lorsque $n \to +\infty$ et on a la vitesse suivante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n^\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{1-\mathbb{E}[\rho]}{1+\mathbb{E}[\rho]} & \text{si } \mathbb{E}[\rho] < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{p.s.}$$

L'obtention d'un théorème centrale limite est plus compliqué que dans le cas classique. On introduit κ la constante telle que $\mathbb{E}[\rho^\kappa] = 1$. Si $\kappa > 2$, il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\sqrt{n}\left(\frac{X_n}{n} - v\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma)$$

avec $v = \frac{1-\mathbb{E}[\rho]}{1+\mathbb{E}[\rho]}$.

On peut s'intéresser au cas simple où $A_0(\Omega) = \{b, 1-b\}$ et $\mathbb{P}(A_0 = b) = a$, $\mathbb{P}(A_0 = 1-b) = 1-a$, avec $0 < a < 1$ et $1/2 < b < 1$. On peut alors calculer toutes les quantités suivantes :

$$\eta = (1-2a)\log\frac{b}{1-b}, \quad \mathbb{E}[\rho] = \frac{a(1-2b)+b^2}{b(1-b)}, \quad v = \frac{(b-a)(1-2b)}{b+a-2b}.$$

En particulier, $\eta < 0$ si et seulement si $a > 1/2$.

Créer un code Scilab permettant de simuler des trajectoires d'une marche aléatoire en environnement aléatoire et d'illustrer les convergences dans les différentes situations décrites ci-dessus. On pourra éventuellement utiliser la fonction `fsolve` de Scilab pour trouver κ.