UNIVERSITÉ DE BORDEAUX MASTER 1, 2016/2017
OUTILS DE SIMULATION

MARCHE ALÉATOIRE RENFORCÉE

On considère deux chemins distincts notés α etβ reliant les même points de départ et d'arrivée et empruntés par des individus successifs. Imaginons par exemple que ces deux chemins soient empruntés par des fourmis : il est connu que ces fourmis laissent derrière elles des phéromones qui ont tendances à attirer les fourmis suivantes. Ainsi le chemin le plus emprunté sera privilégié par les fourmis suivantes ce qui aura tendance à amplifier le phénomène. De même, si on considère des promeneurs en montagne qui doivent choisir entre deux chemins, ils auront tendance à privilégier celui qui aura le moins d'herbe tout en contribuant à la raréfaction de l'herbe. On appelle cela un phénomène de renforcement.

Pour tout $n \geqslant 1$ on note X_n la variable aléatoire à valeur dans $\{\alpha, \beta\}$ qui indique le chemin parcouru par le n-ième individu. On note A_n et B_n les variables aléatoires strictement positives qui indiquent l'attractivité des chemins α et β lors du $n+1$-ième passage. On se donne $A_0 = B_0 = 1$, une fonction $r : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ appelée fonction de renforcement et $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$. On modélise $(X_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$(X_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1}) = \begin{cases} (\alpha, r(A_n), B_n) & \text{si } U_{n+1} \leqslant \frac{A_n}{A_n+B_n} \\ (\beta, A_n, r(B_n)) & \text{si } U_{n+1} > \frac{A_n}{A_n+B_n} \end{cases}.$$

On s'intéresse au nombre de passages par le chemin α et par le chemin β à l'instant n, donnés par

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k=\alpha} \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k=\beta} = n - Y_n.$$

On a les comportements asymptotiques suivants pour X_n et Y_n.

Théorème 0.1

- **Absence de renforcement.** *Si $r(x) = x$ pour tous $x > 0$, alors presque sûrement*

$$Y_n \sim \frac{n}{2} \quad \textit{et} \quad Z_n \sim \frac{n}{2}.$$

- **Renforcement linéaire.** *Si $r(x) = x + 1$ pour tous $x > 0$, alors il existe une variable aléatoire $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ telle que presque sûrement*

$$\frac{Y_n}{n} \to U \quad \textit{et} \quad \frac{Z_n}{n} \to U \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

- **Renforcement géométrique.** *Si $r(x) = \rho x$ pour tous $x > 0$ où $\rho > 1$ est une constante, alors presque sûrement la suite aléatoire $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est constante à partir d'un certain rang sur n, et sa valeur limite suit la loi de Bernoulli symétrique sur $\{\alpha, \beta\}$.*

Créer un code Scilab permettant de simuler des trajectoires de $(X_n)_{n\geqslant 1}$, $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ et d'illustrer les convergences dans les différentes situations décrites ci-dessus. Proposez d'autres fonctions de renforcement et étudiez numériquement les comportements de $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$.