**UNIVERSITÉ DE BORDEAUX** **MASTER 1, 2016/2017**
**OUTILS DE SIMULATION**

# RUINE D'UNE COMPAGNIE D'ASSURANCE

On considère une compagnie d'assurance qui possède un capital initial $c$ et on note $R_t$ son capital au temps $t \geqslant 0$. $R_t$ évolue en fonction des rentrées d'argent et des dépenses de la compagnie.

- La compagnie d'assurance perçoit les cotisations mensualisées de ses clients uniformément réparties sur l'année et constantes au cours du temps : les recettes pendant un temps $t$ sont égales à $pt$ avec $p$ le taux de cotisation par unités de temps.

- Elle verse des primes à ses assurés sinistrés en fonction des dommages subis.

Dans la suite on note $(T_n)_{n\geqslant 1}$ les temps d'apparition aléatoires des sinistres. La suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. On note $N_t$ le nombre de sinistres survenus jusqu'au temps $t$ :

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_i \leqslant t}.$$

On note également $X_n$ le coût (pour l'assurance) du $n$-ième sinistre. On modélise les sinistres et les temps d'apparition des sinistres de la façon suivante.

- Les coûts des sinistres $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d. d'espérance $\lambda$ et de variance $a - \lambda^2$.

- Les temps d'apparition $(T_n)_{n\geqslant 1}$ des sinistres sont indépendants des coûts $(X_n)_{n\geqslant 1}$. Les intervalles de temps entre deux sinistres, notés $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ avec $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$, sont des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Ainsi, on a la valeur de $R_t$ donnée par la formule suivante :

$$R_t = c + pt - \sum_{k_1}^{N_t} X_k.$$

Le comportement asymptotique de $R_t$ découle de la propriété suivante.

**Proposition 0.1** *Notons $C_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k$. Alors on a*

$$\frac{C_t}{t} \to \mu\lambda \ \textit{p.s.} \quad \textit{et} \quad \sqrt{t}\left(\frac{C_t}{t} - \mu\lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mu a) \quad \textit{lorsque} \quad t \to +\infty.$$

La compagnie souhaite connaître son risque de ruine, c'est à dire la probabilité qu'il existe $t > 0$ tel que $R_t < 0$. Notons $\psi(t)$ la probabilité de ruine avant le temps $t$:

$$\psi(t) = \mathbb{P}(\inf_{s\in[0,t]} R_s < 0).$$

On connaît alors le comportement de $\psi(t)$.

**Proposition 0.2**

$$\lim_{t \to +\infty} \psi(t) = 1 \quad ssi \quad p \leqslant \lambda\mu.$$

*De plus, si les sinistres* $(X_n)_{n \geqslant 1}$ *suivent une loi exponentielle de paramètre* $1/\lambda$ *et si* $p > \lambda\mu$ *alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \psi(t) = \frac{\lambda\mu}{p} \exp\left(-\frac{p - \lambda\mu}{p\lambda} c\right).$$

Créer un code Scilab permettant de simuler des trajectoires de $(R_t)_{t \geqslant 0}$ et d'illustrer les différents résultats de convergences décrits ci-dessus.