UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **MASTER 1, 2016/2017**
OUTILS DE SIMULATION

PROCESSUS DE NAISSANCE ET MORT

On considère une population d'organismes asexués (champignon, plancton, bactéries,...) et son évolution au cours du temps. On note X_t le nombre d'individus au temps $t \in \mathbb{R}^+$. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ démarre de $x_0 \in \mathbb{N}$ déterministe et est constant par morceaux. X_t évolue à chaque fois qu'intervient une mort (saut de -1), une naissance (saut de 1) ou l'arrivée d'un immigrant (saut de 1). On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des temps d'apparition de ces événements. On fixe $T_0 = 0$. On suppose que l'évolution de X_t satisfait la modélisation décrite ci-après. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

- conditionnellement au fait que $X_{T_i} = x$, on a $T_{i+1} - T_i \sim \mathcal{E}(\lambda x + \alpha + \mu x)$
- $\mathbb{P}(X_{T_{i+1}} = x + 1 | X_{T_i} = x) = \frac{\lambda x+\alpha}{\lambda x+\alpha+\mu x}$ et $\mathbb{P}(X_{T_{i+1}} = x - 1 | X_{T_i} = x) = \frac{\mu x}{\lambda x+\alpha+\mu x}$
- conditionnellement au fait que $X_{T_i} = x$, $T_{i+1} - T_i$ et $X_{T_{i+1}}$ sont indépendantes entre elles et sont indépendantes des variables $(T_{k+1} - T_k)_{0\leqslant k\leqslant i-1}$ et $(X_k)_{0\leqslant k\leqslant i-1}$,

où $\mu \geqslant 0$ le taux de mort, λ le taux de naissance et α le taux d'immigration sont trois paramètres du modèle. Pour bien fixer les idées, regardons se qui se passe pour les premiers T_i.

- On a $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda x_0 + \alpha + \mu x_0)$, $X_t = x_0$ pour tous $t \in [0, T_1[$ et $X_{T_1} = x_0 + V_1$ avec $V_1 \sim \mathcal{R}(\frac{\lambda x_0+\alpha}{\lambda x_0+\alpha+\mu x_0})$ et V_1 indépendante de T_1.
- Si $X_{T_1} = x_0 + 1$, on a $T_2 \sim \mathcal{E}(\lambda(x_0 + 1) + \alpha + \mu(x_0 + 1))$ indépendante de T_1 et V_1, $X_t = x_0+1$ pour tous $t \in [T_1, T_2[$ et $X_{T_2} = x_0+1+V_2$ avec $V_2 \sim \mathcal{R}(\frac{\lambda(x_0+1)+\alpha}{\lambda(x_0+1)+\alpha+\mu(x_0+1)})$ et V_2 indépendante de T_1, V_1 et T_2.
- Si $X_{T_1} = x_0 - 1$, on a $T_2 \sim \mathcal{E}(\lambda(x_0 - 1) + \alpha + \mu(x_0 - 1))$ indépendante de T_1 et V_1, $X_t = x_0-1$ pour tous $t \in [T_1, T_2[$ et $X_{T_2} = x_0-1+V_2$ avec $V_2 \sim \mathcal{R}(\frac{\lambda(x_0-1)+\alpha}{\lambda(x_0-1)+\alpha+\mu(x_0-1)})$ et V_2 indépendante de T_1, V_1 et T_2.

En fonctions des valeurs des paramètres, le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ peut avoir de nombreux comportements différents.

Proposition 0.1

- **Processus de Poisson.** *Si $\alpha > 0$ et $\lambda = \mu = 0$, alors il n'y a que de l'immigration. On a*

$$\frac{X_t}{t} \to \alpha \ p.s. \quad et \quad \sqrt{t}\left(\frac{X_t}{t} - \alpha\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \alpha) \quad lorsque \quad t \to +\infty.$$

- **Processus de Naissance.** *Si $\lambda > 0$, $x_0 > 0$ et $\alpha = \mu = 0$, alors il n'y a que des naissances. On a*

$$\frac{\log(X_t)}{t} \to \lambda \ p.s. \quad lorsque \quad t \to +\infty.$$

- **Extinction.** *Si* $\alpha = 0$ *et* $\mu > \lambda \geqslant 0$ *alors la population s'éteint presque sûrement :*

$$X_t \to 0 \ p.s. \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty.$$

- **Équilibre.** *Si* $\alpha > 0$ *et* $\mu > \lambda \geqslant 0$ *alors on a convergence vers une mesure invariante :*

$$X_t \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty,$$

  avec Y *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}$*. De plus, on a le théorème ergodique suivant : pour tous* $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=k\}} ds \to \mathbb{P}(Y = k) \ p.s. \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty.$$

Créer un code Scilab permettant de simuler des trajectoires de $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et d'illustrer les différents résultats de convergences décrits ci-dessus.