UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **MASTER 1, 2016/2017**
OUTILS DE SIMULATION

CENTRE DE MASSE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On note μ l'espérance des X_i (si elle existe) et Γ la matrice de covariance des X_i (si elle existe).

On considère la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^d$ définie par $S_0 := 0$ et $S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \geqslant 1$.

Associé à cette marche aléatoire, on peut également définir le processus de centre de masse $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $G_0 := 0$ et $G_n :=:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S_i$ pour $n \geqslant 1$.

L'étude mathématique de ce centre de masse permet de démonter un certain nombre de comportement asymptotique. Tout d'abord, si $\mathbb{E}[||X_i||] < +\infty$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{n} = \frac{1}{2}\mu \qquad \text{p.s.}$$

De plus, si $\mathbb{E}[||X_i||^2] < +\infty$ et si Γ est définie positive, alors on a

$$\sqrt{n}\left(\frac{G_n}{n} - \frac{\mu}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0, \Gamma/3).$$

Si on considère la marche symétrique sur $\mathbb{Z}^d$, c'est à dire la marche pour laquelle la probabilité d'aller à gauche est égale à la probabilité d'aller à droite dans toutes les directions, alors on a, lorsque $d \geq 2$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log ||G_n||}{\log n} = \frac{1}{2} \qquad \text{p.s.}$$

Créer un code Scilab permettant de simuler le centre de masse et de visualiser les convergences p.s. et normalités asymptotiques dans les différentes situations décrites ci-dessus. Que se passe-t-il si $d = 1$ dans le dernier résultat de convergence ?