TD & TP V
CONVERGENCES

1 Loi des Grands Nombres.

La loi des grands nombres, due à Kolmogorov, est un résultat fondamental en Probabilités.

Théorème 1. Loi des grands nombres. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que (X_n) est intégrable et l'on note m son espérance. Si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m \qquad \text{p.s.}$$

Exercice 1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ avec $0 < p < 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

Proposer un estimateur U_n sans biais et fortement consistant de p, basé sur la moyenne empirique $\overline{X}_n$. Afin d'estimer la variance $\sigma^2 = 4p(1-p)$, on propose d'utiliser $V_n = 1-\overline{X}_n^2$. Montrer que V_n est un estimateur biaisé de σ^2 et trouver un estimateur W_n sans biais et fortement consistant de σ^2. Créer un code Scilab illustrant les convergences p.s. de U_n et W_n sur un n-échantillon de loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$, où les paramètres n et p sont affectés par l'utilisateur.

Exercice 2. La durée de vie d'une ampoule électrique peut être modélisée par une variable aléatoire X prenant au hasard ses valeurs dans l'intervalle $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$. Afin d'optimiser l'agenda d'un réparateur, on cherche à estimer θ à partir d'un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ de même loi que X. On propose d'estimer θ par

$$\widehat{\theta}_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k.$$

Calculer la fonction de répartition puis la densité de probabilité de $\widehat{\theta}_n$ et en déduire que $\widehat{\theta}_n \to \theta$ p.s. Créer un code Scilab illustrant cette LGN sur un n-échantillon de loi uniforme $\mathcal{U}([0, \theta])$, où les paramètres n et θ sont affectés par l'utilisateur.

Exercice 3. La loi de Paréto, encore appelée loi de puissance, est utilisée pour modéliser les dépassements d'un seuil. On dit que X suit une loi de Paréto de paramètres $a > 0$ et $\theta > 0$ si $X = \theta \exp(Y)$ avec Y de loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$. On propose d'estimer θ, à partir d'un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ de même loi que X, par

$$\widehat{\theta}_n = \min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k.$$

Calculer la fonction de répartition puis la densité de probabilité de X. En déduire la loi de probabilité associée à $\widehat{\theta}_n$ et montrer que $\widehat{\theta}_n \to \theta$ p.s. Créer un code Scilab illustrant cette LGN sur un n-échantillon de loi de Paréto $\mathcal{P}(a, \theta)$, où les paramètres n, a et θ sont affectés par l'utilisateur.

2 Théorème Limite Centrale.

Le théorème de la limite centrale est le second résultat fondamental en Probabilités. Le premier TLC, dû à De Moivre et connu sous le nom de théorème de Moivre-Laplace, concerne le cas particulier des variables aléatoires de loi de Bernoulli.

Théorème 2. Théorème limite centrale. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que (X_n) est de carré intégrable et l'on note m son espérance et $\sigma^2 > 0$ sa variance. Si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors on a

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Remarque. En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(a \leqslant \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant b\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx.$$

Exercice 4. Utiliser le code Scilab suivant qui permet d'illustrer le TLC sur un n-échantillon de loi Uniforme $\mathcal{U}([0,1])$.

```
--> clear; clf
--> n = input('Entrez la taille de l''échantillon n (par exemple 10) = ');
--> N = input('Entrez le nombre de réalisations N (par exemple 2000) = ');
--> X=rand(n,N); Z=(sum(X,'r')-n/2)/sqrt(n/12);
--> Classe=50; histplot(Classe,Z, style=2);
--> x=[-5:0.001:5]; plot(x,1/sqrt(2*%pi)*exp(-x.*x/2),'red')
--> title('Illustration du TLC','color','red','fontsize',4)
--> xgrid; h1=legend('Histogramme','Loi Normale')
```

Exercice 5. Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$. Soit (X_n) la suite définie par $X_n = n^a \varepsilon_n$ avec $a > 0$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer la transformée de Laplace de S_n donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $L_n(t) = \mathbb{E}[\exp(tS_n)]$. En déduire que

$$\frac{S_n}{n^a\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{2a+1}\Big).$$

Créer un code Scilab illustrant ce TLC sur un n-échantillon de loi de Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$, où les paramètres n et a sont affectés par l'utilisateur.

Exercice 6. Pour tout $x, \lambda > 0$, on pose

$$L_n(x) = \exp(-n\lambda) \sum_{k=0}^{[nx]} \frac{(n\lambda)^k}{k!}.$$

Montrer à l'aide de la LGN et du TLC que

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \lambda, \\ 1/2 & \text{si } x = \lambda, \\ 1 & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$$

Vérifier cette convergence avec un code Scilab.