Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Une urne contient six boules dont 4 blanches et 2 noires. On extrait une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On effectue ensuite des tirages sans remise jusqu'à l'obtention d'une boule de la même couleur que précédement. On note X le nombre de tirages après remise de la boule initialement tirée. Donner la loi de X.

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. Donner la loi de probabilité de $X + Y$.

Exercice 3. Un lot de bulbes de tulipes a un pouvoir germinatif de 80% (i.e. un bulbe planté a 80% de chance de donner une fleur). Chaque bulbe contient un seul des trois gènes R (rouge), B (blanc) et J (jaune) qui détermine la couleur de la fleur. On suppose que la probabilité que le bulbe possède le gène R, B ou J est égale respectivement à $0,5$, $0,1$ et $0,4$. Dans la suite on plante 5 bulbes dans 5 pots identiques.

- Soit X le nombre de fleurs obtenues. Donner la loi de X.
- Soit X_R le nombre de fleurs rouges obtenues. Donner la loi de X_R.
- On plante 5 autres bulbes dans 5 autres pots identiques. Soit Y le nombre de fleurs obtenues. Donner la loi de $X + Y$.

Exercice 4. Un homme rentre chez lui le soir et dispose d'un trousseau de k clés ($k \geqslant 2$). Lorsqu'il n'a pas bu, il essaie une clé au hasard puis, si le résultat est infructueux, il la met de côté et essaie une clé au hasard parmi celles restantes. À chaque insuccès, il répète ce procédé. Lorsque cet homme est ivre, il essaie une clé au hasard puis, à chaque insuccès il remet la clé avec les autres et choisit à nouveau une clé au hasard. On définit les événements suivants : $A =$"l'homme n'a pas bu" et $B =$"l'homme est ivre".

1. Dans toute cette question on suppose que l'homme est ivre. On note X_B la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires à l'homme pour parvenir à ouvrir sa porte quand il est ivre. Quelle est la loi de X_B ?
2. Dans toute cette question on suppose que l'homme n'a pas bu. On note X_A la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires à l'homme pour parvenir à ouvrir sa porte quand il n'a pas bu. Calculer $\mathbb{P}(X_A = 1)$, $\mathbb{P}(X_A = 2)$ et $\mathbb{P}(X_A = 3)$. Quelle est la loi de X_A ?
3. On suppose maintenant que $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Calculer la probabilité p_n que l'homme soit ivre, sachant qu'il est parvenu à ouvrir sa porte au terme d'exactement n essais ($n \in \mathbb{N}^*$). (On pensera à distinguer les cas où $n \leqslant k$ et $n > k$.)

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. Trouver la loi de $X + Y$.
3. On pose $U = \min\{X, Y\}$ et $V = \max\{X, Y\}$. Trouver les lois de (U, V), U et V. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. Un garagiste commande à un constructeur N voitures. On appelle X le nombre de voitures qu'il pourrait vendre dans l'année. On admet que X suit une loi uniforme sur $\{0, 1, ..., n\}$ pour $n = 50 > N$. Toute voiture vendue rapporte au garagiste un bénéfice de $a = 10000$ euros et toute voiture invendue entraîne une perte de $b = 5000$ euros. On appelle G (bénéfice - pertes), le gain du garagiste en fin d'année.

1. Déterminer le gain comme une fonction de X, a et b.
2. Calculer l'espérance du gain du garagiste en fonction de N, a et b.

Exercice 7. Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{G}(p)$. Même question avec la loi $\mathcal{U}(\{1, .., n\})$.

Exercice 8. On considère $X_1, ..., X_n$ n v.a. i.i.d.

1. On suppose que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ inconnu. Donner l'E.M.V. de p.
2. On suppose que $X_i \sim \mathcal{B}(N, p)$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ connu et $p \in]0, 1[$ inconnu. Donner l'E.M.V. de p.
3. On suppose que $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ inconnu. Donner l'E.M.V. de λ.
4. On suppose que $X_i \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ inconnu. Donner l'E.M.V. de p.
5. On suppose que les X_i suivent la loi uniforme sur $\{1, ..., \theta\}$ où $\theta \in \mathbb{N}^*$ est inconnu. Donner l'E.M.V. de θ.