MASTER 1, 2019 — 14/11/19

# PARTIEL
## CORRECTION

## Problème I

1) $U \in ]0,1[$ donc $\frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \in \mathbb{R}^{+*}$ et $1 + \left\lfloor \frac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \right\rfloor \in \mathbb{N}^*$

donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}\left( \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln(1-p)} \right\rfloor = k-1 \right) = \mathbb{P}\left( k-1 \leq \frac{\ln U}{\ln(1-p)} < k \right)$

$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}\left( k\ln(1-p) < \ln U \leq (k-1)\ln(1-p) \right)$$

$$= \mathbb{P}\left( \underbrace{e^{k\ln(1-p)}}_{\in ]0,1]} < U \leq \underbrace{e^{(k-1)\ln(1-p)}}_{\in ]0,1]} \right) = \int_{e^{k\ln(1-p)}}^{e^{(k-1)\ln(1-p)}} dx$$

$$= e^{(k-1)\ln(1-p)} - e^{k\ln(1-p)} = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k$$

$$= p(1-p)^{k-1}.$$

Donc $Z \sim \mathcal{G}(p)$.

2) $U \in ]0,1[$, donc $\pi(U-1/2) \in ]-\pi/2, \pi/2[$ et $S \in \mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$F_S(t) = \mathbb{P}(S \leq t) = \mathbb{P}\left( \tan(\pi(U-1/2)) \leq \frac{t}{c} \right) = \mathbb{P}\left( \pi(U-1/2) \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{c}\right) \right)$$

car $\pi(U-1/2) \in ]-\pi/2, \pi/2[$

$$= \mathbb{P}\left( U \leq \underbrace{\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{c}\right) + \frac{1}{2}}_{\in ]0,1[} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{c}\right) + \frac{1}{2}$$

$F_S$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$F_S'(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{c}\frac{1}{1+(t/c)^2} = \frac{c}{\pi(c^2+x^2)}$ donc $S$ est à densité et sa densité est celle de la loi $\mathcal{C}(c)$.

3) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$P(R\leq t) = P\left(-\varepsilon\frac{\ln U}{\lambda}\leq t\right) = P\left(-\varepsilon\frac{\ln U}{\lambda}\leq t \,\middle|\, \varepsilon=1\right)P(\varepsilon=1)$$
$$+P\left(-\varepsilon\frac{\ln U}{\lambda}\leq t \,\middle|\, \varepsilon=-1\right)P(\varepsilon=-1)$$
$$= P(\ln U\geq -\lambda t)\frac{1}{2} + P(\ln U\leq \lambda t)\frac{1}{2}$$
car $\varepsilon$ et $U$ sont indépendantes.

$$P(\ln U\geq -\lambda t) = P(U\geq e^{-\lambda t}) = (1-e^{-\lambda t})\mathbb{1}_{t\geq 0} + 0\,\mathbb{1}_{t\leq 0}$$
$$P(\ln U\leq \lambda t) = P(U\leq e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}\mathbb{1}_{t\leq 0} + 1\times\mathbb{1}_{t\geq 0}$$

Donc $P(R\leq t) = \dfrac{(1-e^{-\lambda t})}{2}\mathbb{1}_{t\geq 0} + \dfrac{e^{\lambda t}\mathbb{1}_{t\leq 0}+\mathbb{1}_{t\geq 0}}{2} = \dfrac{e^{\lambda t}}{2}\mathbb{1}_{t\leq 0} + \left(1-\dfrac{e^{-\lambda t}}{2}\right)\times\mathbb{1}_{t\geq 0}$

$F_R$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc $R$ est à densité et

$$f_R(t) = F_R'(t) = \frac{\lambda e^{\lambda t}}{2}\mathbb{1}_{t\leq 0} + \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{2}\mathbb{1}_{t<0}.$$

## Problème II

1) $Z_i$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ pour $i\in\{1,2\}$

Donc $(Z_1,Z_2)$ est un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\{0,1\}^2$.

Il suffit donc de calculer $P(Z_1=i, Z_2=j)$ pour $i,j\in\{0,1\}^2$.

Tout d'abord $(Z_1=0, Z_2=0) = (X_1=0, X_2=0)$ : Aucune entreprise n'a fait faillite (directement ou indirectement) est équivalent à dire qu'aucune entreprise n'a fait faillite directement car il y a une faillite indirecte si l'autre entreprise fait faillite directement.

Donc $\mathbb{P}(Z_1=0, Z_2=0) = \mathbb{P}(X_1=0, X_2=0) = \mathbb{P}(X_1=0)\,\mathbb{P}(X_2=0)$ car $X_1, X_2$ indépendants

$= (1-p)^2$

$(Z_1=1, Z_2=0)$ : l'entreprise 1 a forcément fait faillite directement car sinon cela signifierait qu'elle a fait faillite indirectement et donc $X_2=1$ impliquant $Z_2=1$... De plus l'entreprise 2 n'a pas fait faillite directement $(X_2=0)$ et n'a pas été contaminée par l'entreprise 1

$(Z_1=1, Z_2=0) = (X_1=0, X_2=1, Y_{12}=0)$

Donc $\mathbb{P}(Z_1=1, Z_2=0) = \mathbb{P}(X_1=0)\,\mathbb{P}(X_2=1)\,\mathbb{P}(Y_{12}=0)$ par indépendance

$= (1-p)\,p\,(1-r)$

De même $\mathbb{P}(Z_1=0, Z_2=1) = p(1-p)(1-r)$

Enfin, $\mathbb{P}(Z_1=1, Z_2=1) = 1 - \mathbb{P}(Z_1=0, Z_2=1) - \mathbb{P}(Z_1=1, Z_2=0) - \mathbb{P}(Z_1=0, Z_2=0)$

$= 1 - 2p(1-p)(1-r) - (1-p)^2$

$= \cancel{1} - \cancel{2p} + 2p^2 + 2pr - 2p^2r - \cancel{1} + \cancel{2p} - p^2$

$= p^2 + 2pr(1-p)$

2) $Z_1$ et $Z_2$ sont indépendantes ssi $\mathbb{P}(Z_1=i, Z_2=j) = \mathbb{P}(Z_1=i)\,\mathbb{P}(Z_2=j)$ $\forall i,j \in \{0,1\}$.

$\mathbb{P}(Z_1=0) = \mathbb{P}(Z_1=0, Z_2=0) + \mathbb{P}(Z_1=0, Z_2=1) = (1-p)^2 + (1-p)p(1-r) = (1-p)(1-pr)$

Par symétrie on a $\mathbb{P}(Z_2=0) = (1-p)(1-pr)$

Donc $\mathbb{P}(Z_1=0, Z_2=0) = \mathbb{P}(Z_1=0)\,\mathbb{P}(Z_2=0)$ ssi $(1-p)^2 = (1-p)^2(1-pr)^2$

ssi $(1-pr)^2 = 1$

ssi $pr = 0$ ssi $r = 0$ (car $p > 0$)

Ainsi, si $r \neq 0$, $Z_1$ et $Z_2$ ne sont pas indépendantes.

Si $r = 0$, alors $Y_{21} = Y_{12} = 0$ donc $Z_1 = X_1$ et $Z_2 = X_2$ ce qui implique que $Z_1$ et $Z_2$ sont indépendants.

3) $N$ est une v.a discrète à valeurs dans $\{0,1,2\}$.

$$P(N=0)=P(Z_1=0, Z_2=0)=(1-p)^2$$

$$P(N=1)=P(Z_1=1, Z_2=0)+P(Z_1=0, Z_2=1)=2p(1-p)(1-r)$$

$$P(N=2)=P(Z_1=1, Z_2=1) = p^2+2pr(1-p).$$

Problème III

1) $D$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1,2,..,6\}$
$X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{0,1,2,..,6\}$

$(X,D)$ est un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\{0,..,6\}\times\{1,..,6\}$

$\cancel{P(X=i)}$, Soient $i\in\{0,..,6\}$ $j\in\{1,..,6\}$

$P(X=i, D=j) = 0$ si $i>j$ (on ne peut pas avoir $i$ piles si on ne fait que $j<i$ lancers)

sinon

$$\begin{aligned} P(X=i, D=j) &= P(\text{on réalise } i \text{ piles sur } j \text{ lancers indépendants})\, P(D=j) \\ &= P(Y=i)/6 \quad \text{avec } Y \sim \mathcal{B}(j,p) \\ &= C_j^i\, p^i (1-p)^{j-i}/6 \end{aligned}$$

2) $$P(D=1 \mid X=0) = \frac{P(D=1, X=0)}{P(X=0)} = \frac{(1-p)/6}{\sum_{j=1}^{6} P(X=0, D=j)} = \frac{(1-p)}{\sum_{j=1}^{6} C_j^0 (1-p)^j}$$

$$= \frac{(1-p)}{\sum_{j=1}^{6}(1-p)^j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{5}(1-p)^j} = \frac{1}{\dfrac{1-(1-p)^6}{1-(1-p)}} = \frac{p}{1-(1-p)^6}$$