/

Universités Bordeaux
Master 1 MIMSE

21/12/2011

EXAMEN TERMINAL PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

11 points

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre α (notée $\mathcal{E}(\alpha)$) dont la densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On pose

$$R_n = \min\{X_1, ..., X_n\}, \quad M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}, \quad Z_n = \alpha M_n - \ln(n).$$

1 1. Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\alpha)$.

2 2. (a) Calculer $\mathbb{P}(R_n > t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

2 (b) Montrer que R_n suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

2 (c) Montrer que $R_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ p.s..

2 3. (a) Calculer la fonction de répartition de Z_n.

2 (b) Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition $g(x) = e^{-e^{-x}}$.

PROBLÈME II

4 points

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(1,1)$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 = 1$. On pose

$$U = cX, \quad V = aY - bZ, \quad W = bY + aZ.$$

4 Montrer que les variables aléatoires U, V et W sont indépendantes et calculer leur loi.

PROBLÈME III

7 points

On rappelle que si X est une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On rappelle également que la loi exponentielle de paramètre α (notée $\mathcal{E}(\alpha)$) est une loi de probabilité dont la densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Enfin la fonction caractéristique de la loi de la loi $\mathcal{E}(\alpha)$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

3 1. Soient $\theta > 0$ et $X \sim \mathcal{E}(1)$. Montrer que la variable aléatoire $Y = \lfloor \theta X \rfloor + 1$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1 - e^{-1/\theta})$.

4 2. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que $Z_n \sim \mathcal{G}(\lambda/n)$. Montrer que Z_n/n converge en loi vers une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

MASTER 1, 2011 21/12/11

Examen Terminal
CORRECTION

Problème 1

1) Soit $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$.

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,dx$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \int_0^t \alpha e^{-\alpha x}\,dx = \left[-e^{-\alpha x}\right]_0^t = 1 - e^{-\alpha t} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_X(t) = (1 - e^{-\alpha t})\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

2) a) $t \in \mathbb{R}$. $R_n \in \mathbb{R}^+$ donc $\mathbb{P}(R_n > t) = 1$ si $t \leq 0$

si $t > 0$, $\mathbb{P}(R_n > t) = \mathbb{P}(\min(X_1, \dots X_n) > t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > t\}\right)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendantes}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(t)) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\alpha t} = e^{-\alpha n t}$$

b) $R_n \in \mathbb{R}^+$ donc $F_{R_n}(t) = 0$ si $t \leq 0$

si $t > 0$, $F_{R_n}(t) = \mathbb{P}(R_n \leq t) = 1 - \mathbb{P}(R_n > t) = 1 - e^{-\alpha n t}$

F_{R_n} est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{E}(n\alpha)$ donc $R_n \sim \mathcal{E}(n\alpha)$

c) $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|R_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(R_n > \varepsilon) \quad \text{car } R_n \geq 0$$

$$= e^{-\varepsilon n \alpha}$$

$e^{-\varepsilon n \alpha}$ est le terme général d'une série convergente car $0 < e^{-\varepsilon \alpha} < 1$ donc

$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|R_n - 0| > \varepsilon) < +\infty$. Donc $R_n \to 0$ p.s.

3) a) $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = \mathbb{P}\left(M_n \leq \frac{t}{\alpha} + \frac{\ln n}{\alpha}\right) = 0$ si $\frac{t}{\alpha} + \frac{\ln n}{\alpha} \leq 0$

si $\frac{t}{\alpha} + \frac{\ln n}{\alpha} > 0$ (toujours vrai pour n suffisamment grand)

alors $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \left\{ X_k \leq \frac{t}{\alpha} + \frac{\ln n}{\alpha} \right\}\right)$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_k \leq \frac{t}{\alpha} + \frac{\ln n}{\alpha}\right) \quad \text{car les } X_k \text{ sont indépendants.}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[1 - e^{-\alpha\left[\frac{t}{\alpha} + \frac{\ln n}{\alpha}\right]}\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[1 - e^{-t} e^{-\ln n}\right] = \left[1 - \frac{e^{-t}}{n}\right]^n = e^{n \log(1 - e^{-t}/n)}$$

b) $n \log\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -e^{-t}$

donc $\mathbb{P}(Z_n \leq t) \xrightarrow{n \to +\infty} e^{-e^{-t}}$. $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ avec Z v.a.r. de fonction de

répartition $g(x) = e^{-e^{-x}}$.

<u>Problème 2:</u>

X, Y, Z sont indépendantes donc $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien.

On a $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, I_3\right)$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ est obtenu par une transformation linéaire du vecteur gaussien $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ donc c'est un vecteur gaussien.

On a $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A I_3 {}^tA\right)$.

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a-b \\ b+a \end{pmatrix}$ et $A{}^tA = I_3$ donc $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} c \\ a-b \\ b+a \end{pmatrix}, I_3\right)$.

Donc U, V, W sont indépendantes, $U \sim \mathcal{N}(c,1)$, $V \sim \mathcal{N}(a-b, 1)$ et $W \sim \mathcal{N}(b+a, 1)$.

<u>Problème 3:</u>

1) X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\lfloor \theta X \rfloor$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y=k) = P(\lfloor \theta X \rfloor = k-1) = P(k-1 \leq \theta X < k) = P\left(\frac{k-1}{\theta} \leq X < \frac{k}{\theta}\right)$$

$$= \int_{\frac{k-1}{\theta}}^{k/\theta} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_{\frac{k-1}{\theta}}^{k/\theta} = e^{-\frac{k-1}{\theta}} - e^{-k/\theta}$$

$$= e^{-\frac{k-1}{\theta}}\left[1 - e^{-1/\theta}\right] = \left(e^{-1/\theta}\right)^{k-1}\left(1-e^{-1/\theta}\right) = (1-p)^{k-1} p \quad \text{avec } p = 1-e^{-1/\theta}$$

donc $Y \sim \mathcal{G}(1-e^{-1/\theta})$

2) On calcule la fonction caractéristique $\phi_{Z_n/n}$ de Z_n/n.

$t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{Z_n/n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{\frac{itZ_n}{n}}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\frac{itk}{n}} \frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} = e^{\frac{it}{n}} \frac{\lambda}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[e^{it/n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right]^k$$

$$\phi_{Z_n/n}(t) = e^{it/n} \frac{\lambda}{n} \frac{1}{1-e^{it/n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} = \frac{\lambda}{n} \frac{1}{e^{-it/n}-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} = \frac{\lambda}{n} \frac{1}{e^{-it/n}-1+\frac{\lambda}{n}}$$

on a $e^{-it/n}-1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{it}{n}$

Donc $\phi_{Z_n/n}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n\left(\frac{\lambda}{n}-\frac{it}{n}\right)} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

$\phi_{Z_n/n}(t) \xrightarrow{n \to +\infty} \phi(t)$ fonction caractéristique de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Donc $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(\lambda)$.