Universités Bordeaux
Master 1 MIMSE

07/01/2013

EXAMEN TERMINAL
PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

8 points

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Rappelons que la loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$ est une loi continue de densité

$$f(x) = \mu e^{-\mu x} \mathbb{1}_{x \geqslant 0}.$$

Soient U et V les variables aléatoires réelles définies par

$$U = X + Y \quad \text{et} \quad V = \frac{X+Y}{Y}.$$

1. Le vecteur aléatoire (X, Y) est il un vecteur aléatoire à densité ? Si oui, donner sa densité $f_{(X,Y)}$.
2. Montrer que la densité de probabilité du couple (U, V) est donnée par

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{u}{v^2} \exp(-u) \mathbb{1}_{u \geqslant 0} \mathbb{1}_{v \geqslant 1}.$$

3. En déduire les lois marginales de U et V.
4. Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?

PROBLÈME II

4 points

Soient X, Y et Z trois v.a. telles que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

1. Donner les lois de X, Y et Z. Sont-elles indépendantes ?
2. Le vecteur (X, Y, Z) possède-t-il une densité ?

3. On pose
$$U = X, \quad V = X + Z - Y, \quad W = Z.$$
Montrer que les variables aléatoires U, V et W sont indépendantes et calculer leur loi.

PROBLÈME III

8 points

La loi de Paréto, encore appelée loi de puissance, est utilisée pour modéliser les dépassements d'un seuil. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Paréto $\mathcal{P}(a, \theta)$ avec $a > 0$ si $X = \theta e^Y$ où Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, on peut estimer la valeur θ par
$$\hat{\theta}_n = \min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k.$$

1. Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par
$$F_X(x) = \left(1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^a\right) \mathbb{1}_{x\geqslant\theta}.$$
2. Vérifier que $\hat{\theta}_n$ suit la loi de Paréto $\mathcal{P}(na, \theta)$. (On pourra calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n$.)
3. Montrer que $\hat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ.
4. Montrer également que $n\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)$ converge en loi vers une v.a. Z qui suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ à déterminer.

MASTER 1, 2012 07/01/13

TERMINAL CORRECTION

PROBLÈME 1

1) (X,Y) est un vecteur à densité car X et Y sont des variables aléatoires à densité indépendantes. De plus

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = e^{-x} e^{-y} \mathbb{1}_{x\geq 0} \mathbb{1}_{y\geq 0}$$

2) $(U,V) = \varphi(X,Y)$

avec
$$\varphi : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*} \times]1,+\infty[$$
$$(x,y) \longmapsto \left(x+y, \frac{x+y}{y}\right)$$

φ est $\mathcal{C}^\infty$ et inversible, d'inverse

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{+*} \times]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$$
$$(u,v) \longmapsto \left(u\left(1-\frac{1}{v}\right), \frac{u}{v}\right)$$

donc φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme : Comme (X,Y) est un vecteur à densité, (U,V) est un vecteur à densité.

Soit h une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v)\, f_{(U,V)}(u,v)\, du\, dv$$
$$= \mathbb{E}\left[h\left(X+Y, \frac{X+Y}{Y}\right)\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} h\left(x+y, \frac{x+y}{y}\right) e^{-x} e^{-y} \mathbb{1}_{x\geq 0} \mathbb{1}_{y\geq 0}\, dx\, dy$$

On effectue le changement de variable $u = x+y$, $v = \frac{x+y}{y}$

$$\operatorname{Jac} \varphi^{-1} = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{v} & \frac{u}{v^2} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{-u}{v^2}$$

Ainsi, $\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v) \frac{u}{v^2} e^{-u} \mathbb{1}_{u \geq 0} \mathbb{1}_{v \geq 1} \, du \, dv$

Finalement on a $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{u}{v^2} e^{-u} \mathbb{1}_{u\geq 0} \mathbb{1}_{v \geq 1}$

3) $\forall u \geq 0, \quad f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v) dv = u e^{-u} \int_1^{+\infty} \frac{1}{v^2} dv = u e^{-u}$

Donc $f_U(u) = u e^{-u} \mathbb{1}_{u \geq 0}$

$\forall v \geq 1 \quad f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v) du = \frac{1}{v^2} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = \frac{1}{v^2}$

Donc $f_V(v) = \frac{1}{v^2} \mathbb{1}_{v \geq 1}$

4) U et V sont indépendantes car

$f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$.

PROBLEME II

1) $X \sim \mathcal{N}(1,1) \quad Y \sim \mathcal{N}(0,2) \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Pour que X, Y, Z soient indépendantes, il faut et il suffit que la matrice de covariance soit diagonale. Donc X, Y et Z ne sont pas indépendantes.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1-1 = 0$ Donc $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ ne possède pas de densité

3) $$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$ transformation linéaire

Donc $$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} {}^tA \right)$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$U \sim \mathcal{N}(1,1)$ $\quad V = 1$ p.s. $\quad W \sim \mathcal{N}(0,1)$.

U, V, W sont indépendantes car la matrice de covariance est diagonale.

PROBLEME III

1) $X(\Omega) = [\theta, +\infty[$

Donc pour $x < \theta$, $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$

Pour $x \geq \theta$,

$$F_X(x) = P(\theta e^Y \leq x) = P\left(e^Y \leq \frac{x}{\theta}\right) = P(Y \leq \log(x/\theta))$$

Comme $Y \sim \mathcal{E}(a)$ et $\log(x/\theta) \geq 0$

On a $$F_X(x) = \int_0^{\log x/\theta} a e^{-at}\, dt = 1 - \exp\left(-a \log\left(\frac{x}{\theta}\right)\right)$$

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(\log\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-a}\right)\right) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^a$$

2) $F_{\hat{\theta}_n}(x) = P(\hat{\theta}_n \leq x) = P(\min_{1 \leq k \leq n} X_k \leq x)$

$\hat{\theta}_n(\Omega) = [\theta, +\infty[$ donc $F_{\hat{\theta}_n}(x) = 0$ si $x < \theta$

Si $x \geq \theta$,

$$F_{\hat{\theta}_n}(x) = P(\min_{1 \leq k \leq n} X_k \leq x) = 1 - P(x < \min_{1 \leq k \leq n} X_k)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{x < X_k\}\right) \quad \text{indépendance des } X_k$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(x < X_k)$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P(X_k \leq x)) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{an}$$

on en déduit que $\hat{\theta}_n \sim \mathcal{P}(na, \theta)$.

3) $\forall \varepsilon > 0$, on a

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = P(\hat{\theta}_n \geq \theta + \varepsilon) \quad \text{car } \hat{\theta}_n \geq \theta$$

$$= 1 - P(\hat{\theta}_n < \theta + \varepsilon) = 1 - F_{\hat{\theta}_n}(\theta + \varepsilon) = \left(\frac{\theta}{\theta + \varepsilon}\right)^{na} = b^n$$

avec $b = \left(\frac{\theta}{\theta + \varepsilon}\right)^a$.

Comme $b \in]0, 1[$, il en découle que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^n = \frac{b}{1-b} < +\infty \quad \text{Donc } \hat{\theta}_n \longrightarrow \theta \text{ p.s.}$$

4) $V_n = n(\hat{\theta}_n - \theta)$. Comme $\hat{\theta}_n \geq \theta$, $F_{V_n}(x) = 0$ pour $x < 0$

si $x \geq 0$, $F_{V_n}(x) = P\left(\hat{\theta}_n \leq \frac{x}{n} + \theta\right) = F_{\hat{\theta}_n}\left(\frac{x}{n} + \theta\right) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + x/n}\right)^{na}$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x}{n(\theta + x/n)}\right)^{na} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \exp\left(-\frac{a}{\theta}x\right)$$

Donc $V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ avec $Z \sim \mathcal{E}(a/\theta)$.