MASTER 1, 2014 17/12/14

PARTIEL
CORRECTION

PROBLEME 1

1) X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes donc (X,Y) est un vecteur à densité. De ~~plus~~ plus

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

2) $(U,V) = \phi(X,Y)$ avec

Rmq : U est bien définie car $P(Y=0)=0$.

$$\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$$
$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, y\right)$$

On a

$$\phi^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$$
$$(u,v) \longmapsto (uv, v)$$

ϕ est une biject° de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et comme ϕ, ϕ^{-1} sont $\mathcal{C}^1$, ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Soit h une fonction mesurable bornée $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \mathbb{E}\left[h\left(\frac{X}{Y}, Y\right)\right] = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} h\left(\frac{x}{y}, y\right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}{2\pi}\, dx\, dy$$

On fait le changement de variable $(u,v) = \phi(x,y)$.

$$\left|\operatorname{Jac}_{\phi^{-1}}(u,v)\right| = \left| \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = |v|$$

Donc $$\mathbb{E}[h(U,V)] = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} h(u,v) \frac{e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}}{2\pi} |v|\, du\, dv$$

Ainsi (U,V) est à densité et $f_{(U,V)}(u,v) = |v| \dfrac{e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}}{2\pi}$

3) $V = Y$ donc la loi marginale de V est la loi de Y : $V \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\,dv = 2\int_0^{+\infty} \frac{v}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\,dv = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}}{(u^2+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi(u^2+1)}$$

Donc $U \sim \mathcal{C}(1)$.

4) Si U et V étaient indépendantes on aurait $f_{U,V}(u,v) = f_U(u) f_V(v) = \dfrac{1}{\pi(u^2+1)} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$

ce qui n'est pas le cas. Donc U et V ne sont pas indépendantes.

Problème II.

1) Soit h une fonction mesurable bornée $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(Y)] &= \mathbb{E}[h(\varepsilon X)] = \mathbb{E}[h(X)\mathbb{1}_{\varepsilon=1}] + \mathbb{E}[h(-X)\mathbb{1}_{\varepsilon=-1}] \\
&= \mathbb{E}[h(X)]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\varepsilon=1}] + \mathbb{E}[h(-X)]\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\varepsilon=-1}]
\end{aligned}$$

car X et ε sont indépendants.

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\ \frac{1}{2} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h(-x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx}_{=\int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \text{ par le changement de variable } y=-x}\ \frac{1}{2} = \int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

Donc $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

2) $\mathrm{Covar}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathcal{E}X^2] - 0 = \mathbb{E}[\mathcal{E}]\,\mathbb{E}[X^2]$ car X et $\mathcal{E}$ indépendants

$= 0$ car $\mathbb{E}[\mathcal{E}] = 1\times\frac{1}{2} - 1\times\frac{1}{2} = 0$.

3) (X,Y) n'est pas un vecteur gaussien car

$$X+Y = \mathcal{E}X + X = 0\,\mathbb{1}_{\mathcal{E}=-1} + 2X\,\mathbb{1}_{\mathcal{E}=1}$$

Donc $\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}((\mathcal{E}=-1)\,\dot{\cup}\,(X=0,\mathcal{E}=1))$

$= \mathbb{P}(\mathcal{E}=-1) + \mathbb{P}(X=0,\mathcal{E}=1)$

$= \frac{1}{2} + 0 \in]0,1[\implies X+Y$ n'est pas une variable gaussienne.

Problème III

1) D'après la loi forte des grands nombres $\bar{X}_n \to m$ p.s.

Donc, comme $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, $(\bar{X}_n)^2 \to m^2$ p.s.

2) $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)^2 = \sqrt{n}(\bar{X}_n - m)\times(\bar{X}_n - m)$

D'après le TCL, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

De plus $(\bar{X}_n - m) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ ~~presque~~ (loi faible des grands nombres)

Comme $(\bar{X}_n - m)$ converge en probabilité vers une constante et $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)$ converge en loi,

$\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)(\bar{X}_n - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

Or la convergence en loi vers une constante implique la convergence en probabilité, donc

$\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

3) On a $\sqrt{n}((\bar{X}_n)^2 - m^2) = \underbrace{2\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)\,m}_{\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,4m^2\sigma^2)} + \underbrace{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)^2}_{\xrightarrow{\mathbb{P}} 0}$

Donc $\sqrt{n}\left((\bar{X}_n)^2 - m^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 4m^2\sigma^2)$.

Problème IV :

1) Soit $\varepsilon > 0$, on veut estimer $\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon)$.

Si $\varepsilon < 1$,
$$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Or $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right)$ $\qquad n\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n}{n^2} = \frac{-1}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$

Donc $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow{+\infty} 1$ et $\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) \xrightarrow{+\infty} 0$.

Si $\varepsilon \geq 1$, $\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - 0| > 1/2) \xrightarrow{+\infty} 0$.

Ainsi $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

2) $\mathbb{E}[|X_n - 0|] = \mathbb{E}[X_n] = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$.

Donc $X_n \xrightarrow{L^1} 0$ (on aurait pu en déduire $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$).

$\mathbb{E}[|X_n - 0|^2] = \mathbb{E}[X_n^2] = \mathrm{Var}\, X_n + \mathbb{E}[X_n]^2 = n \times \frac{1}{n^2} \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}$

$\xrightarrow{+\infty} 0$. Donc $X_n \xrightarrow{L^2} 0$.

3) Comme les X_n sont indépendantes, on sait que $X_n \to 0$ p.s. ssi $\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) < +\infty \\ \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$

Or $\mathbb{P}(X_n > \varepsilon) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right)$

$n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ Donc $\mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = +\infty$ et donc $X_n \not\to 0$ p.s.