Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Montrer que λX suit une loi exponentielle de paramètre 1.
3. Calculer l'espérance de $\exp(-tX)$ pour tout $t \geqslant 0$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ.

1. Donner la loi de $Z = \min\{X, Y\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.
3. Montrer que les évènements $(X < Y)$ et $(Z \geqslant t)$ sont indépendants, $\forall t \geqslant 0$.

Exercice 3. La loi Gamma de paramètres (n, λ), $(n \geqslant 1, \lambda > 0)$ a pour densité

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{x \geqslant 0}.$$

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi Gamma de paramètres (n, λ) et (m, λ). Montrer que $X + Y$ suit une loi Gamma de paramètres $(n + m, \lambda)$.
2. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que $X_1 + ... + X_n$ suit une loi Gamma de paramètres (n, λ).

Exercice 4. Montrer que la filtration naturelle d'un processus de Poisson est continue à droite, i.e.

$$\mathcal{F}_t^N = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^N.$$

En déduire que τ est un temps d'arrêt si et seulement si $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t^N$, $\forall t \geqslant 0$.

Exercice 5. Soient S et T deux temps d'arrêt.

1. Montrer que $\max\{S, T\}$, $\min\{S, T\}$ et $S + T$ sont encore des temps d'arrêt.
2. Si $S \leqslant T$, est-ce que $T - S$ est un temps d'arrêt ?
3. Montrer que $\mathcal{F}_T$ est une tribu.
4. Soit $R = \min\{S, T\}$. Montrer que $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
5. Montrer que $(S \leqslant T) \in \mathcal{F}_T$.

Exercice 6. Soit $s > 0$. Montrer que T_{N_s+1} est un temps d'arrêt, mais pas T_{N_s}.

Exercice 7. Soit $s > 0$. Montrer que $T_{N_s+1} - s$ suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 8.

1. On suppose que l'on observe N_t pour un $t > 0$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ et étudier son comportement asymptotique.
2. On suppose maintenant que l'on observe T_n. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ et étudier son comportement asymptotique.

Exercice 9.

– Soit (N_t) un processus de Poisson et T_1 son premier instant de saut. Calculer la fonction de répartition de T_1 conditionnellement à $N_T = 1$.

– Soit I un intervalle de $[0, t]$ et n un entier. Conditionnellement à $N_t = n$, calculer la probabilité qu'il y ait exactement k sauts de (N_t) qui aient lieu dans I.

Exercice 10. Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson de paramètre μ indépendant de $(X_t)_{t\geqslant 0}$. Montrer que $(N_t = X_t + Y_t)$ est un procesus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu$.

Exercice 11. Soit (N_t) un processus de Poisson d'intensité λ. On suppose que les occurences des sauts sont de deux types A ou B, chaque occurence étant de type A avec probabilité p indépendamment des autres occurences du processus (N_t). Soient (N_t^A) et (N_t^B) les processus de comptage des occurences de A et B respectivement.

1. Donner pour t fixé la loi du couple (N_t^A, N_t^B).
2. En déduire pour tout t la loi de la variable aléatoire N_t^A.
3. Montrer que pour tout t les variables aléatoires N_t^A et N_t^B sont indépendantes.
4. Montrer que (N_t^A) et (N_t^B) sont deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.

Exercice 12. À l'arrêt Peixotto il passe 6 bus de la liane 10 et 2 bus de la liane 20 en une heure. On suppose que les passages de ces bus forment deux processus de Poisson indépendants.

1. Donner les intensités des deux processus de Poisson.
2. Quelle est la probabilité qu'il passe exactement 8 bus en une heure ?
3. Les jours de grève, un bus sur deux reste au dépôt. Quelle est alors la probabilité de ne voir passer aucun bus pendant une demi-heure ?

Exercice 13. (extrait d'un examen de 2012) On suppose que les buts marqués par les Girondins de Bordeaux suivent un processus de Poisson (N_t) d'intensité λ. On s'intéresse dans cet exercice seulement aux matchs qui se sont terminés avec deux buts marqués par les Girondins sans s'occuper du score de l'adversaire. La durée d'un match est une constante notée T et les instants des buts sont des variables aléatoires notées T_1 et T_2.

1. Expliquer pourquoi pour $i \in \{1, 2\}$ et $t \geqslant 0$, on a $(T_i \leqslant t) = (N_t \geqslant i)$.
2. En utilisant la question précédente, calculer $\mathbb{P}(T_2 \leqslant T/2 | N_T = 2)$ la probabilité qu'il y ait eu exactement deux buts des Girondins avant la mi-temps.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait eu exactement un but des Girondins avant la mi-temps, sachant qu'ils ont marqué deux buts en tout.
4. Montrer que pour tous $0 < s < t < T$,

$$\mathbb{P}(T_1 \leqslant s, T_2 \leqslant t | N_T = 2) = \mathbb{P}(N_s = 1, N_t = 2 | N_T = 2) + \mathbb{P}(N_s = 2, N_t = 2 | N_T = 2).$$

5. En utilisant les propriétés de stationarité et d'accroissements indépendants du processus de Poisson, montrer que pour tous $0 < s < t < T$,

$$\mathbb{P}(T_1 \leqslant s, T_2 \leqslant t | N_T = 2) = \frac{s(2t - s)}{T^2}.$$

6. En déduire les fonctions de répartition puis les densités de T_1 et T_2 conditionnellement à $N_T = 2$.
7. Quels sont les temps moyens pour marquer chacun des deux buts ?

Exercice 14. (adapté d'un examen de 2013) Soit (N_t) un processus de Poisson d'intensité λ. On pose

$$G_t = t - T_{N_t}, \quad \text{et} \quad D_t = T_{N_t+1} - t.$$

1. Tracer une trajectoire du processus de Poisson et indiquer sur le graphique les instants t, T_{N_t}, et T_{N_t+1} ainsi que les durées G_t et D_t.
2. Pour t fixé et $0 < x \leqslant t$, $y \geqslant 0$, montrer que $(G_t < x, D_t \leqslant y) = (N_{t-x} < N_t < N_{t+y})$. En déduire $\mathbb{P}(G_t < x, D_t \leqslant y)$.
3. Pour t fixé et $y \geqslant 0$, montrer que $(G_t = t, D_t \leqslant y) = (N_t = 0, N_{t+y} > 0)$. En déduire $\mathbb{P}(G_t = t, D_t \leqslant y)$.
4. Pour t fixé et $y \geqslant 0$, calculer $(D_t \leqslant y)$ et en déduire la loi de D_t.
5. Calculer la fonction de répartition de G_t.
6. Calculer $\mathbb{P}(\min(T_1, t) > x)$ pour tout x réel. En déduire que G_t a la même loi que $\min(T_1, t)$.
7. Montrer que G_t et D_t sont indépendantes.
8. Calculer $\mathbb{E}[G_t]$. En déduire $\mathbb{E}[G_t + D_t]$. Que pensez-vous de ce résultat ?