Universités Bordeaux
Master 1 MIMSE 5/12/2012

PARTIEL PROBABILITÉS

Durée 1h30
Le barème est uniquement donné à titre indicatif.

PROBLÈME I

8 points

1. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e.
$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Calculer la fonction caractéristique Φ_X de X. En déduire l'espérance et la variance de X.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Donner la loi de probabilité de $X + Y$.
3. La variable X sert à modéliser le nombre de clients qui attendent à un guichet. On suppose que chacun des clients a une probabilité $1/2$ d'être un homme et cela de manière indépendante d'un client à l'autre. On note G le nombre d'hommes dans la file d'attente.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(G = k|X = n)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(G = k)$ et la loi de G.

PROBLÈME II

6 points

Soit ε une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et soit X une variable aléatoire à densité f. On suppose que ε et X sont indépendantes. On considère la variable aléatoire Y définit par $Y = \varepsilon X$.

1. Pour tous les réels $a < b$ calculer $\mathbb{P}(X \in [a, b]$ et $\varepsilon = 1)$ et $\mathbb{P}(X \in [a, b]$ et $\varepsilon = -1)$ (le résultat dépend bien évidemment de f).
2. Montrer que Y possède une densité et la calculer.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y et X aient la même loi.

PROBLÈME III

6 points

Un homme rentre chez lui le soir et dispose d'un trousseau de k clés ($k \geqslant 2$). Lorsqu'il n'a pas bu, il essaie une clé au hasard puis, si le résultat est infructueux, il la met de côté et essaie une clé au hasard parmi celles restantes. À chaque insuccès, il répète ce procédé. Lorsque cet homme est ivre, il essaie une clé au hasard puis, à chaque insuccès il remet la clé avec les autres et choisit à nouveau une clé au hasard. On définit les événements suivants : $A =$"l'homme n'a pas bu" et $B =$"l'homme est ivre".

1. Dans toute cette question on suppose que l'homme est ivre. On note X_B la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires à l'homme pour parvenir à ouvrir sa porte quand il est ivre. Quelle est la loi de X_B ?
2. Dans toute cette question on suppose que l'homme n'a pas bu. On note X_A la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires à l'homme pour parvenir à ouvrir sa porte quand il n'a pas bu. Calculer $\mathbb{P}(X_A = 1)$, $\mathbb{P}(X_A = 2)$ et $\mathbb{P}(X_A = 3)$. Quelle est la loi de X_A ?
3. On suppose maintenant que $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Calculer la probabilité p_n que l'homme soit ivre, sachant qu'il est parvenu à ouvrir sa porte au terme d'exactement n essais ($n \in \mathbb{N}^*$). (On pensera à distinguer les cas où $n \leqslant k$ et $n > k$.)