Université de Bordeaux
Master 2 MIMSE 02/12/2015

Partiel
Processus de Markov

Durée 2h00

Questions de cours

1. Donner deux définitions équivalentes d'un processus de Poisson.
2. Énoncer la propriété de Markov forte pour un processus de Poisson.

Exercice 1

Soient $(N_t^1)_{t\geqslant 0}$ et $(N_t^2)_{t\geqslant 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensité λ et soit $r > 0$ un réel fixé. On pose

$$N_t = \begin{cases} N_t^1 & \text{si } t < r, \\ N_t^2 & \text{si } t \geqslant r. \end{cases}$$

1. Donner la loi de N_t pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
2. Est-ce que le processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson et, si oui, quelle est son intensité ?

On définit maintenant le processus

$$\tilde{N}_t = \begin{cases} N_t^1 & \text{if } t < r \\ N_r^1 + N_t^2 - N_r^2 & \text{if } t \geqslant r. \end{cases}$$

3. Donner la loi de $\tilde{N}_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $(\tilde{N}_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus à accroissements stationnaires et indépendants.
4. Est-ce que le processus $(\tilde{N}_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson et, si oui, quelle est son intensité ?

Exercice 2

La marque de voiture *DMC* possède trois concessionnaires à Bordeaux. Ces trois concessionnaires sont ouverts 10 heures par jours. On suppose que les arrivées de clients dans chacune de ces concessions forment trois processus de Poissons indépendants. Au bout d'une journée, 20 clients sont passés chez le premier concessionnaire, 10 clients chez le deuxième concessionnaire et 15 clients chez le troisième concessionnaire.

1. Donner les intensités estimées des trois processus de Poisson.

2. Quelle est la loi du nombre de clients à être passés chez un concessionnaire DMC à Bordeaux en une heure.
3. On sait que seulement un cinquième des clients de concessions achètent une voiture. Calculer la probabilité de vendre en une journée au moins une voiture DMC à Bordeaux.

On s'intéresse maintenant à la concession DMC de Saint Jean pied de port. On suppose que les ventes de voiture dans cette concession forment un processus de Poisson d'intensité λ que l'on note $(N_t)_{t\geqslant 0}$. On note T_i l'arrivée du ième client.

4. Soient $0 < t < T$ et $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $(T_1 > t) = (N_t = 0)$, calculer $\mathbb{P}(T_1 > t | N_T = n)$.
5. On considère $0 < t < s < T$ et on suppose maintenant $n \geqslant 2$.
   Calculer $\mathbb{P}(T_1 > t, T_n \leqslant s | N_T = n)$ et $\mathbb{P}(T_2 > t | N_T = n)$.

Exercice 3

Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi π. On suppose les v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes de $(N_t)_{t\geqslant 0}$. On définit pour $t \geqslant 0$ le processus $Z_t = \sum_{n=1}^{N_t} X_n$ appelé processus de Poisson composé.

1. Pour quelle loi π, $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est-il un processus de Poisson d'intensité λ ?
2. On suppose dans cette question que X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$. Pourquoi Z est-il un processus de Poisson ? Donner son intensité. On pourra utiliser un des résultats de la feuille de TD.
3. On note ϕ la fonction caractéristique de la loi π des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et ψ_t la fonction caractéristique de Z_t. En remarquant que l'on a, pour tous $r \in \mathbb{R}$,
$$\psi_t(r) = \mathbb{E}\left[e^{irZ_t}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{irZ_t} \mathbb{1}_{N_t=k}\right],$$
   montrer que
$$\psi_t(r) = e^{\lambda t(\phi(r)-1)}.$$
4. On suppose que la loi π des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est centrée et de variance finie σ^2. Montrer, en utilisant la question précédente, que
$$\frac{Z_t}{\sigma\sqrt{\lambda}\sqrt{t}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{lorsque } t \to +\infty.$$