Universités Bordeaux
Master 1 MIMSE 08/01/2013

EXAMEN TERMINAL PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Rappelons que la loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$ est une loi continue de densité

$$f(x) = \mu e^{-\mu x} \mathbb{1}_{x \geqslant 0}.$$

1. Le vecteur aléatoire (X, Y) est il un vecteur aléatoire à densité ? Si oui, donner sa densité $f_{(X,Y)}$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X+Y]$.
3. On pose $U = \min\{X, 1/X\}$. U est-elle bien définie ? Quelles sont les valeurs possibles prises par U ?
4. Calculer la fonction de répartition de U.
5. U est-elle une variable aléatoire à densité ? Si oui, donner sa densité.

PROBLÈME II

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^3$ de moyenne ${}^t(1, 0, 1)$ et de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Est-ce que le vecteur gaussien (X_1, X_2, X_3) possède une densité sur $\mathbb{R}^3$?
2. Quelle est la loi du vecteur (X_1, X_2) ? Est-ce que le vecteur (X_1, X_2) possède une densité sur $\mathbb{R}^2$?
3. Considérons la variable aléatoire réelle $Y = X_2 - aX_1$, où a est un nombre réel quelconque. Quelle est la loi du couple (X_1, Y) ?
4. À quelle condition sur a les variables aléatoires réelles X_1 et Y sont indépendantes ?

PROBLÈME III

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geqslant \lambda$, on considère $(X_i^n)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p_n = \lambda/n$. On considère alors les variables aléatoires

$$I_n = \inf\{i \in \mathbb{N}^* | X_i^n = 1\} \quad \text{et} \quad N_n = \frac{I_n}{n}.$$

1. Donner la loi de I_n.
2. Donner la loi de N_n.
3. Montrer que la fonction caractéristique ϕ_{N_n} de N_n vaut

$$\phi_{N_n}(t) = \frac{\lambda}{n-\lambda} \times \frac{1}{1-(1-\frac{\lambda}{n})e^{\frac{it}{n}}} \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right) e^{\frac{it}{n}}.$$

4. Montrer que N_n converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera sa fonction caractéristique.