Université de Bordeaux
Master 1 MIMSE 17/12/2014

EXAMEN TERMINAL
PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Rappelons que la loi normale centrée réduite est une loi continue de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Soient U et V les variables aléatoires réelles définies par

$$U = \frac{X}{Y}, \quad V = Y.$$

1. Le vecteur (X, Y) est-il un vecteur aléatoire à densité ? Si oui donner sa densité $f_{(X,Y)}$.
2. Montrer que le couple (U, V) est un vecteur à densité et donner sa densité.
3. Donner les lois marginales de U et V.
4. Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?

PROBLÈME II

Soient X et ε deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. On pose $Y = \varepsilon X$.

1. Montrer que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Calculer la covariance de X et Y.
3. Est-ce que (X, Y) suit la loi $\mathcal{N}(0_{\mathbb{R}^2}, I_2)$ ou $0_{\mathbb{R}^2}$ est le vecteur nul de dimension 2 et I_2 la matrice identité de dimension 2×2 ?

PROBLÈME III

Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma \in \mathbb{R}^+$. On pose

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}.$$

1. Montrer que $(\bar{X}_n)^2$ converge presque sûrement et donner sa limite.
2. Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)^2$ converge en probabilité vers 0.
3. Montrer que $\sqrt{n}\left((\bar{X}_n)^2 - m^2\right)$ converge en loi et donner sa limite. On pourra utiliser l'égalité suivante :

$$\left((\bar{X}_n)^2 - m^2\right) = 2(\bar{X}_n - m)m + (\bar{X}_n - m)^2.$$

PROBLÈME IV

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{n^2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.
2. Est-ce que X_n converge vers 0 dans L^1 ? Même question dans L^2.
3. Question subsidiaire. On suppose maintenant que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes. Est-ce que X_n converge presque sûrement vers 0 ?