Université de Bordeaux
Master 2 MIMSE 14/12/2016

Examen terminal
Processus markoviens de sauts

Durée 3h00

Exercice 1

On considère une machine avec deux composants électroniques identiques. La machine fonctionne dès qu'au moins un des composants fonctionne. On suppose que :

- Chaque composant a un taux de panne λ (i.e. les temps de pannes sont des variables aléatoires exponentielles i.i.d. de paramètre λ).
- Le temps de réparation d'un composant lorsque l'autre fonctionne suit une loi exponentielle de paramètre μ.
- Lorsqu'un des composants tombe en panne, l'autre peut aussi tomber en panne instantanément avec une probabilité c.
- Lorsque les deux composants électroniques tombent en panne, la machine est hors-service et ne peut pas être réparée. Dans ce cas, les composants électroniques ne sont pas réparés.

On note X_t le nombre de composants électroniques en état de marche au temps t. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus markovien de sauts homogène à valeur dans l'espace d'état $E = \{0, 1, 2\}$ et de loi initiale $X_0 = 2$.

1. Soient $R \sim \mathcal{E}(\alpha)$ et $S \sim \mathcal{E}(\beta)$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $\min(R, S) \sim \mathcal{E}(\alpha + \beta)$. On note $M = \min(R, S)$. Montrer que
$$\mathbb{P}(M = R) = \mathbb{P}(R \leqslant S) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$
2. Donner la matrice de transition de la chaine de Markov incluse $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Donner le générateur infinitésimal du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
4. Donner les classes de communication et leurs nature.
5. Calculer le temps moyen d'atteinte de l'ensemble $\{0\}$.

On suppose maintenant que la machine peut être réparée lorsque les deux composants électroniques ne fonctionnent pas. Dans ce cas les temps de réparation pour chaque composant électronique sont indépendants et de loi exponentielle de paramètre μ.

1. Donner la nouvelle matrice de transition de la chaine de Markov incluse $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner le nouveau générateur infinitésimal du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
3. Donner les classes de communication et leurs nature.
4. Est-ce qu'il existe une mesure de probabilité invariante ? Si oui, calculer la.
5. On suppose que l'entreprise gagne 100 euros par unité de temps lorsque la machine fonctionne et perd 50 euros par unité de temps lorsque la machine ne fonctionne pas. Quel est le gain moyen par unité de temps de l'entreprise ?

Exercice 2

On considère une population de bactéries. On note X_t le nombre de bactéries au temps $t \geqslant 0$ et on suppose que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts homogène à valeurs dans l'espace d'état $\mathbb{N}$, de loi initiale $X_0 = x_0 \geqslant 0$ et de générateur infinitésimal

$$Q_{xy} = \begin{cases} \lambda x & \text{si } y = x+1 \\ \nu x & \text{si } y = x-1 \\ \alpha & \text{si } y = x \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $x > 0$, avec $\lambda > 0$ et $\nu > 0$ deux paramètres fixés. On pose également $Q_{01} = \lambda$ et $Q_{00} = -\lambda$.

1. Quelle est la valeur de α ?
2. Montrer que la condition de non explosion est satisfaite.
3. Donner les classes de communication.
4. On rappelle que les marches aléatoires non symétriques $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$ sont transientes et $\lim_{n\to+\infty} Y_n = +\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\mathbb{P}(Y_{n+1} - Y_n = 1) > \mathbb{P}(Y_{n+1} - Y_n = -1)$ (respectivement $<$).
   (a) Si $\nu < \lambda$, montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est transient.
   (b) Si $\nu > \lambda$, montrer que le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est recurrent.

Exercice 3

On considère $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien réel, $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus de Poisson d'intensité λ, $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. dont la loi est notée ν et a, b des constantes. On suppose que $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$, $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants. On définie le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ en posant, pour tout $t \geqslant 0$,

$$X_t = at + bW_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n.$$

On note $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ la filtration engendrée par le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

1. Montrer que que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est à accroissements indépendants et stationnaires.

2. On suppose que $a = b = 0$ et ν est une loi discrète. Donner l'espace d'état E de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus markovien de sauts.

   (a) On suppose que $\nu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-\pi}$, i.e. $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = -\pi) = 1/2$. Donner E, les classes de communication et leurs natures. Calculer le générateur infinitésimal de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

   (b) On suppose que $\nu = \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$, i.e. $\mathbb{P}(Z_i = 2) = \mathbb{P}(Z_i = -1) = 1/2$. Donner E et les classes de communication. Montrer que $\frac{X_t}{t}$ converge presque sûrement et donner sa limite. En déduire la nature des classes de communication.

3. On suppose que les variables aléatoires $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont intégrables et que ν est une loi discrète.

   (a) Calculer $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N_t} Z_n | N_t = k]$ pour tous les $k \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N_t} Z_n]$.

   (b) Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale pour la fitration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si l'on impose une relation entre a, λ et $\mathbb{E}[Z_1]$. On rappelle qu'une martingale $(M_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ (pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$) est un processus intégrable tel que $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ lorsque $t > s$.

   (c) On suppose que $Z_i = c$. Montrer que $(X_t^2 - dt)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ si l'on impose une relation entre a, b, c et d.

4. On suppose que $a = b = 0$ et ν est une loi discrète finie : $\nu = \sum_{k=1}^{n} p_k\delta_{x_k}$, i.e. $\mathbb{P}(Z_i = x_k) = p_k$. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ peut être réécrite comme

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} x_k N_t^k$$

   où N^1,...,N^n sont n processus de Poisson indépendants dont l'intensité est à déterminer.