Université de Bordeaux - CPBX - PC écoles S4 - Correction du devoir surveillé du 9 avril 2018.

Exercice 1. **a.** Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt.$$

□ Puique $1-t+t^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (car le discriminant vaut -3), la fonction $f(t) := \frac{1}{1-t+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ et l'intégrale existe. On écrit

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt.$$

Le changement de variable $x = \frac{2t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ donne :

$$I = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

■

b. Montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 - nk + k^2}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

□ On remarque que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ avec $f(t) = \frac{1}{1-t+t^2}$. Puique f est continue sur $[0,1]$, le théorème de la convergence des sommes de Riemann assure que S_n converge I quand n tend vers l'infini. ■

Exercice 2. Soit $R \in [0,1[$.

a. Calculer

$$I = \int_0^R \frac{t}{1-t^2} dt$$

□ $I = \left[-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)\right]_0^R = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-R^2}\right)$. ■

b. Montrer que pour tout $t \in [0,R]$ et tout N entier, on a

$$0 \leq \frac{t}{1-t^2} - \sum_{k=0}^{N} t^{2k+1} \leq \frac{t^{2N+3}}{1-R^2}.$$

□ on écrit

$$\frac{t}{1-t^2} - \sum_{k=0}^{N} t^{2k+1} = \frac{t(t^2)^{N+1}}{1-t^2} \leq \frac{t^{2N+3}}{1-R^2}.$$

■

c. En déduire que l'on a

$$0 \leq \ln\left(\frac{1}{1-R^2}\right) - \sum_{k=0}^{N} \frac{R^{2(k+1)}}{k+1} \leq \frac{R^{2N+4}}{(1-R^2)(N+2)}.$$

□ On intègre l'inégalité précédente sur $[0,R]$ et on multiplie par 2. ■

d. Comment peut-on calculer facilement une approximation de $\ln(4/3)$ avec deux chiffres exacts après la virgule ?

□ On choisit $R = \frac{1}{2}$ et on déduit de l'inégalité précédente que

$$0 \leq \ln(4/3) - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{4^k(k+1)} \leq \frac{1}{3(N+2)4^{N+1}}.$$

Pour $N = 1$ on obtient deux décimales exactes :

$$0 \leq \ln(4/3) - \frac{9}{32} \leq \frac{1}{144}.$$

$(9/32 = 0,28125,\ \ln(4/3) = 0,2876....)$ ■

Exercice 3. Soient

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}, \quad g(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$$

a. Montrer que f est intégrable sur $]1, 2]$.

□ f est continue sur $]1, 2]$ et au voisinage de 1 on a $sin(\pi x) \sim -\pi(x-1)$, $\ln x \sim (x-1)$ donc $f(x) \sim -\pi$. On en conclut que f est intégrable sur $]1, 2]$. ■

b. Montrer que g est intégrable sur $[2, \infty[$.

□ En posant $t = \ln x$ on a $\int_2^b g(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^2}dt$ et comme $1/t^2$ est intégrable sur $[1, \infty[$ on en déduit que g est intégrable sur $[2, \infty[$. ■

c. En déduire que l'intégrale généralisée de f sur $[2, \infty[$ existe.

□ Une intégration par parties donne

$$\int_2^b f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{\cos(b\pi)}{\ln b} + \int_2^b \cos(\pi x)g(x)dx\right).$$

Comme $\mid \cos(\pi x)g(x) \mid\leq g(x)$ qui est intégrable sur $[2, \infty[$, on en déduit que la limite des intégrales existe quand $b \to \infty$. ■

d. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[2, \infty[$.

□ Pour $3 \leq n \leq b < n+1$, $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$\int_2^b \mid f(x) \mid dx \geq \int_2^n \mid f(x) \mid dx = \sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1} \mid f(x) \mid dx = \sum_{k=2}^{n-1}\int_0^1 \mid f(k+t) \mid dt$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1}\int_0^1 \frac{\sin(t\pi)}{\ln(k+t)}dt \geq \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\ln(k)}\int_0^1 \sin(t\pi)dt \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

■

Exercice 4. Etant donné $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt.$$

a. Montrer que $f(x)$ est bien défini.

□

$\left|\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\right| \leq\mid x \mid e^{-t}$ qui est t-intégrable sur $]0, \infty[$.

■

b. Enoncer le théorème de dérivation de Lebesgue d'une intégrale à paramètre. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et calculer $f'(x)$.

□ On vérifie l'hypothèse de domination

$$\left|\partial_x\left(\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\right)\right| = \left|\cos(xt)e^{-t}\right| \leq e^{-t}$$

et comme e^{-t} est intégrable sur $[0,\infty[$ on peut appliquer le théorème de dérivation qui assure que

$$f'(x) = \int_0^\infty \cos(xt)e^{-t}dt = \Re\int_0^\infty e^{t(ix-1)}dt = \Re\left[\frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}\right]_0^\infty = \frac{1}{1+x^2}$$

■

c. En déduire la valeur de $f(x)$.

□

Puisque $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on a $f(x) = \arctan(x) + C$ et comme $f(0) = 0$, on a $C = 0$.

■

d. En déduire que pour tout $x > 0$ l'intégrale

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} e^{-y/x} dy$$

existe, et admet une limite que l'on calculera quand $x \to \infty$.

□ $x > 0$ étant fixé, le changement de variable $y = xt$ donne

$$\arctan(x) = f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} e^{-y/x} dy = F(x)$$

donc $F(x) = f(x)$ qui tend vers $\pi/2$ quand $x \to \infty$.

■