

Contrôle optimal d'un modèle réduit du sillage d'un cylindre circulaire

Bergmann M., Cordier L. & Brancher J.-P.

LEMETA, UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP)

ENSEM - 2, avenue de la forêt de Haye

BP 160 - 54504 Vandoeuvre cedex

Michel.Bergmann@ensem.inpl-nancy.fr

Cette communication aborde le contrôle d'écoulement par une méthode couplant contrôle optimal et réduction de dynamique. L'objectif est de démontrer que cette approche conduit à une amélioration importante des performances aérodynamiques et qu'elle s'accompagne d'une réduction drastique du coût de synthèse de la loi de contrôle, permettant en cela de s'intéresser à des configurations industrielles. Pour des raisons de facilité de mise en œuvre, la pertinence de la méthode est évaluée sur une configuration décollée générique constituée par le sillage laminaire bidimensionnel d'un cylindre circulaire. Dans cette étude, la loi de contrôle est l'évolution temporelle de la vitesse tangentielle du cylindre. La fonction objectif à minimiser par contrôle optimal est la traînée aérodynamique. L'écoulement est simulé numériquement pour un nombre de Reynolds égal à 200 par une méthode d'éléments finis. En raison des coûts numériques importants (temps CPU et encombrement mémoire) liés à l'approche par contrôle optimal, un modèle d'ordre réduit basé sur la Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (Proper Orthogonal Decomposition, POD) est utilisé comme équations d'état pour résoudre le problème d'optimisation par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Lorsque les équations de Navier-Stokes sont résolues à nouveau en utilisant la loi de contrôle déterminée à l'aide du système réduit POD, une réduction de 25% du coefficient de traînée moyen est obtenue. Comparé au cas où les équations de Navier-Stokes sont utilisées comme équations d'état pour résoudre le problème de contrôle optimal, notre approche nécessite un temps de calcul et un stockage mémoire respectivement 100 fois et 600 fois inférieurs. Finalement, les limites de l'approche couplant modèle réduit POD et contrôle optimal sont abordées.

1 Introduction

En raison de sa simplicité de configuration et de son caractère prototype d'écoulement décollé (Williamson, 1996), l'écoulement de sillage d'un cylindre circulaire est depuis longtemps utilisé pour développer de nouvelles méthodes de contrôle transposables par la suite à des géométries plus complexes. Récemment, l'approche par contrôle optimal a reçu un regain d'intérêt pour contrôler par rotation sinusoidale l'écoulement de sillage (He *et al.*, 2000; Homescu *et al.*, 2002; Protas et Styczek, 2002). Dans ces études, les équations de Navier-Stokes sont utilisées comme équations d'état dans la résolution du système optimal. Un des aspects attractifs de la théorie du contrôle optimal est l'introduction d'une fonction de coût qui fournit une mesure quantitative de l'objectif à réaliser par le contrôle. Toutefois, les coûts numériques associés à ce type d'approche étant très onéreux, notamment

en terme de mémoire, la résolution d'un problème d'optimisation contraint par les équations de Navier-Stokes tridimensionnels est très peu abordée dans la littérature. Une méthode intéressante pour réduire les coûts de calcul est d'optimiser de façon exacte un modèle d'ordre réduit (lire Alexandrov *et al.*, 1997, pour une discussion sur l'utilisation de modèles réduits en optimisation).

L'objectif de cette étude est de démontrer que l'on peut réduire la traînée d'un cylindre circulaire par rotation instantanée, en utilisant une méthode de contrôle optimal faisant intervenir des coûts de calcul réduits. Cette étude est en partie motivée par les expériences de Tokumaru et Dimotakis (1991) où une réduction de traînée de 80% était obtenue en régime turbulent ($Re = 15,000$) mais de manière purement empirique. Récemment, Protas et Wesfreid (2002) ont montré que la contrôlabilité de l'écoulement de sillage bidimensionnel augmentait avec le nombre de Reynolds. Par conséquent, puisque le sillage reste bidimensionnel jusqu'à un nombre de Reynolds approximativement égal à 190 où se produit une bifurcation de Hopf longitudinale générant des effets tridimensionnels (Noack et Eckelmann, 1994; Barkley et Henderson, 1996), la valeur du nombre de Reynolds présentant la plus grande contrôlabilité en 2D est légèrement inférieure à 200. Afin de faciliter les comparaisons avec la littérature, cette étude sera réalisée pour un nombre de Reynolds égal à 200. Dans leur étude, He *et al.* (2000) ont observé que l'application du contrôle minimisant la traînée générerait des vortex moins énergétiques que ceux engendrés par un cylindre stationnaire. Un critère énergétique semble donc être bien approprié pour déterminer un modèle d'ordre réduit de dynamique. De par la convergence énergétique optimale de sa base (Lumley, 1967; Cordier et Bergmann, 2002a), la Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres ou *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) est utilisée ici pour développer un modèle d'ordre réduit du cylindre contrôlé. Une approche similaire est développée dans Graham *et al.* (1999a,b) en vue de contrôler le sillage d'un cylindre circulaire pour un nombre de Reynolds égal à 100.

Cette communication est organisée de la manière suivante : la section 2 introduit la configuration de notre étude et la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Dans les deux sections suivantes, la POD est d'abord introduite (§3) puis la *méthode de la fonction de contrôle*, mise en œuvre pour développer le système réduit POD de l'écoulement contrôlé, est présentée (§4). A la section 5, l'approche par contrôle optimal, utilisée pour résoudre le problème d'optimisation avec contraintes, est ensuite décrite en introduisant la fonction objectif et les multiplicateurs de Lagrange. La section 6 présente les résultats issus du cou-

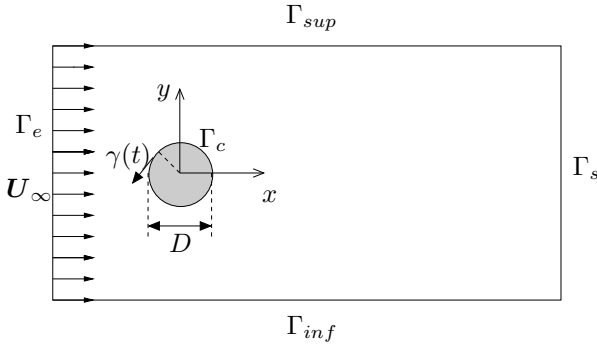


FIG. 1 – Géométrie du domaine : le diamètre du cylindre vaut 1. Les frontières d’entrée et de sortie sont situées respectivement à une distance égale à 10 et 20 du centre du cylindre. La hauteur est égale à 20.

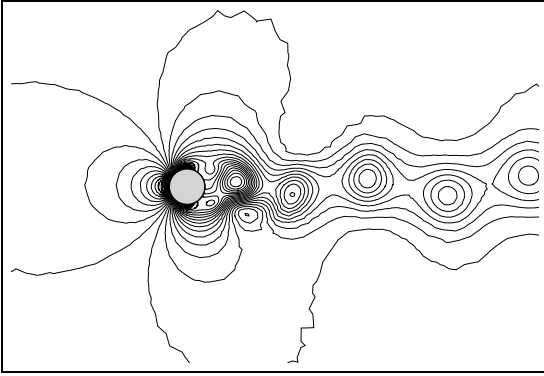


FIG. 2 – Isobares à $t = 150$ pour $Re = 200$.

plage contrôle optimal et modèle réduit POD. La section 6.1 décrit d’abord la méthode de détermination d’une base généralisée nécessaire à la description d’une large gamme de dynamique balayée par l’écoulement pendant le processus itératif de résolution du problème d’optimisation. Finalement, à la section 6.3, nous déterminons la réduction de traînée obtenue dans le cas des équations de Navier-Stokes lorsque la loi de contrôle évaluée par notre approche à la section 6.2 est utilisée.

2 Configuration d’étude

L’écoulement d’un fluide incompressible et visqueux autour d’un cylindre circulaire de diamètre D est étudié dans un domaine bidimensionnel Ω (figure 1). Les équations de Navier-Stokes sont résolues par une méthode à pas fractionnaires en temps et par éléments finis en espace. Le maillage non structuré utilisé comporte 12 000 nœuds. Les détails de la méthode numérique sont présentés dans Cordier et Bergmann (2002b).

Les simulations sont effectuées pour un nombre de Reynolds égal à 200. On peut voir sur la figure 2 l’allée tourbillonnaire de Von Kármán : aucune réflexion issue de la frontière de sortie n’apparaît.

Les coefficients de traînée (C_D) et de portance (C_L) sont calculés de la manière suivante

$$(C_D, C_L)^T = - \int_{\Gamma_c} K_p \mathbf{n} d\Gamma + \frac{2}{Re} \int_{\Gamma_c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (1)$$

où K_p est le coefficient de pression.

Référence	S_t	$\langle C_D \rangle_t$
Braza <i>et al.</i> (1986)	0.200	1.400
Henderson (1997)	0.197	1.341
He <i>et al.</i> (2000)	0.198	1.356
Homescu <i>et al.</i> (2002)	-	1.440
présente étude	0.195	1.382

TAB. 1 – Nombres de Strouhal et coefficients de traînée moyen ($Re = 200$). Cylindre stationnaire.

L’évolution temporelle des coefficients de traînée et de portance est représentée sur la figure 3. Le régime périodique étant caractérisé par la fréquence de détachement des tourbillons, il est utile d’introduire le nombre de Strouhal

$$S_t = \frac{f D}{U_\infty}$$

où f est la fréquence fondamentale obtenue par analyse de Fourier (voir figure 4) et U_∞ la vitesse à l’infini amont. Les coefficients aérodynamiques oscillent de manière périodique.

La table 1 montre la comparaison du nombre de Strouhal et du coefficient de traînée moyen de notre simulation avec des résultats de références issus de la littérature. Une excellente concordance est observée.

Dans ce qui suit, on considère que le cylindre oscille avec une vitesse angulaire $\gamma(t)$. Cette fonction de contrôle est cherchée par la théorie du contrôle optimal afin de réduire l’énergie liée au sillage.

3 La Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD)

Cette décomposition, introduite en turbulence par Lumley en 1967, consiste à rechercher dans un ensemble de réalisations de l’écoulement $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ avec $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$, la réalisation $\Phi(\mathbf{X})$ “ressemblant le plus” en moyenne aux réalisations $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ i.e. la solution du problème suivant :

$$\max_{\Phi} \langle |(\mathbf{u}, \Phi)|^2 \rangle \quad \text{t.q.} \quad \|\Phi\|^2 = 1. \quad (2)$$

Par construction, la réalisation $\Phi(\mathbf{X})$ solution du problème (2) maximise la représentation énergétique de l’écoulement. Dans Cordier et Bergmann (2002a), on montre que l’équation (2) est équivalente à une équation intégrale de Fredholm¹ :

$$\int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Phi_j^{(n)}(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda^{(n)} \Phi_i^{(n)}(\mathbf{X}) \quad (3)$$

où $R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ est le tenseur des corrélations spatio-temporelles en deux points. Ce tenseur symétrique et défini positif, possède donc un ensemble de valeurs propres réelles et positives $\lambda^{(n)}$, qui par ailleurs forme une série décroissante et convergente. Les vecteurs propres associés $\Phi^{(n)}(\mathbf{X})$ sont orthogonaux, à divergence nulle et vérifient les conditions aux limites homogènes de la simulation numérique.

Selon que l’opération de moyenne $\langle \cdot \rangle$, apparaissant dans (2), soit évaluée en temps ou en espace, on trouve deux formulations équivalentes du problème POD (voir Cordier et

1. Dans cette équation et par la suite, il y aura sommation implicite sur l’indice répété.

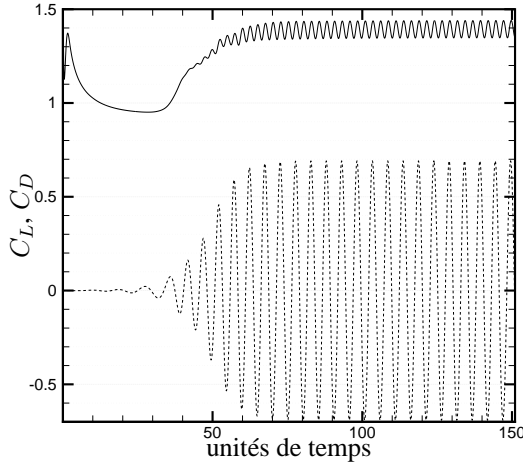


FIG. 3 – Evolution temporelle des coefficients aérodynamiques pour le cylindre non contrôlé à $Re = 200$. – C_D , \cdots C_L .

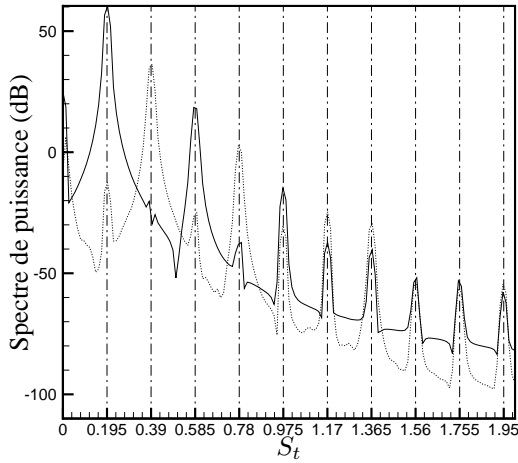


FIG. 4 – Spectre de puissance des coefficients aérodynamiques. – C_L , \cdots C_D .

Bergmann, 2002a, §5). Dans la première, dénommée méthode directe, le terme $R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ est remplacé par $r_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ tenseur des corrélations spatiales et les fonctions propres $\Phi(\mathbf{X})$ par $\phi(\mathbf{x})$. Dans la seconde, introduite par Sirovich (1987) et dénommée méthode des snapshots, l'équation de Fredholm à résoudre est définie par :

$$\int_T C(t, t') a^{(n)}(t') dt' = \lambda^{(n)} a^{(n)}(t) \quad (4)$$

où $C(t, t') = \frac{1}{T} \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t') d\mathbf{x}$ est le tenseur de corrélations temporelles. Cette approche étant plus appropriée dans le cas où une simulation numérique est utilisée pour déterminer les réalisations $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ nécessaires à la résolution de l'équation de Fredholm, cette méthode a été retenue dans nos travaux.

Enfin, l'ensemble des fonctions propres de la POD formant une base de l'écoulement, toute réalisation $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ peut

s'écrire sous la forme du développement suivant :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a^{(n)}(t) \phi_i^{(n)}(\mathbf{x}). \quad (5)$$

4 Modèle réduit POD de l'écoulement de cylindre contrôlé

Lorsque le contrôle instationnaire est appliqué au cylindre, les conditions aux limites ne sont plus homogènes. En conséquence, les fonctions de base POD de l'écoulement non contrôlé ne sont plus adaptées pour une projection de Galerkin. Afin de déterminer des fonctions de base homogènes, la *méthode de la fonction de contrôle*, introduite dans Graham *et al.* (1999a), est utilisée. Le champ de vitesse s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \gamma(t) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_{POD}} a^{(k)}(t) \phi^{(k)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

où $\mathbf{u}_m(\mathbf{x})$ est le champ de vitesse moyen calculé comme une moyenne d'ensemble sur les réalisations et où $\mathbf{u}_c(\mathbf{x})$ est un champ de vitesse quelconque vérifiant des conditions aux limites homogènes sur le cylindre. Une méthode simple pour l'évaluer est de considérer le champ de vitesse généré pour $\gamma = 1$ sur le cylindre et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur les autres frontières du domaine.

La forme faible des équations de Navier-Stokes est alors restreinte au sous espace des fonctions propres POD $\mathcal{S}_{POD}^{N_{gal}}$ déterminé par les N_{gal} premières fonctions propres spatiales $\phi^{(i)}$. L'optimalité énergétique des fonctions de bases suggère qu'un faible nombre de modes POD est suffisant pour représenter de manière satisfaisante une réalisation quelconque de l'écoulement. La dimension $N_{gal} \ll N_{POD}$ du sous espace $\mathcal{S}_{POD}^{N_{gal}}$ est déterminée comme le plus petit entier M tel que l'information relative $\frac{\sum_{i=1}^M \lambda^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_{POD}} \lambda^{(i)}}$ soit supérieure à un pourcentage prédéfini $\delta\%$ (pour l'écoulement non contrôlé et $\delta = 99,9$, $M = N_{gal} = 6$). Une projection de Galerkin conduit à (Cordier et Bergmann, 2002b) :

$$\begin{aligned} \left(\phi^{(i)}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= \left(p, \nabla \cdot \phi^{(i)} \right) - \left[p \phi^{(i)} \right] \\ &\quad - \frac{1}{Re} \left(\nabla \phi^{(i)}, (\nabla \mathbf{u})^T \right) + \frac{1}{Re} \left[(\nabla \mathbf{u})^T \phi^{(i)} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{avec } [a] = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \text{ et } (A, B) = \int_{\Omega} A : B d\Omega = \sum_{i,j} \int_{\Omega} A_{ij} B_{ji} d\Omega.$$

Après introduction de la décomposition des vitesses (6) dans l'équation (7), un modèle d'ordre réduit représentatif de l'écoulement contrôlé autour du cylindre est obtenu :

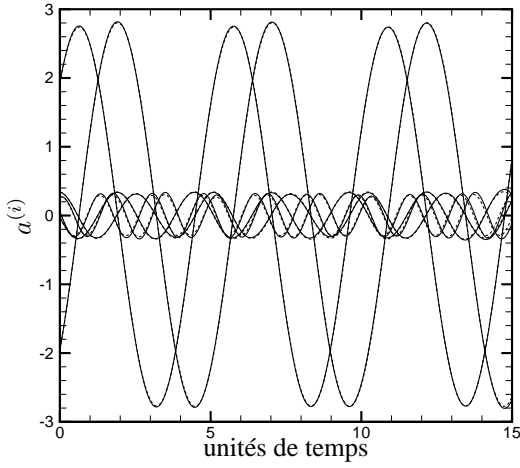


FIG. 5 – Comparaison des coefficients temporels prédits (—) et projetés (···). Cylindre non contrôlé ($\gamma = 0$).

$$\begin{aligned} \frac{d a^{(i)}(t)}{d t} = & \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{B}_{ij} a^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} \mathcal{C}_{ijk} a^{(j)}(t) a^{(k)}(t) \\ & + \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{d t} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a^{(j)}(t) \right) \gamma + \mathcal{G}_i \gamma^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Les coefficients \mathcal{A}_i , \mathcal{B}_{ij} , \mathcal{C}_{ijk} , \mathcal{D}_i , \mathcal{E}_i , \mathcal{F}_{ij} et \mathcal{G}_i dépendent uniquement de ϕ , \mathbf{u}_m , \mathbf{u}_c et du nombre de Reynolds Re . Leurs expressions sont données dans Cordier et Bergmann (2002b).

Le système (8) est intégré en temps par une méthode de Runge Kutta d'ordre 4 à partir des conditions initiales

$$a^{(i)}(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \phi^{(i)}(\mathbf{x})), \quad i = 1, \dots, N_{gal} \quad (9)$$

donnant un jeu de coefficients temporels $a^{(i)}(t)$ de prédiction pouvant être comparés aux coefficients de projection issus de la simulation numérique.

En raison de la troncature intervenant dans la projection de Galerkin, les modes d'ordre élevé, correspondant aux échelles dissipatives de l'écoulement, ne sont pas résolus par le modèle réduit POD. Lors de l'intégration temporelle des équations (8), des instabilités numériques peuvent apparaître après quelques périodes de résolution. Ce problème est comparable à celui rencontré en simulation aux grandes échelles où il y a nécessité de modéliser les échanges énergétiques dans l'espace de Fourier. Ici, la modélisation des modes d'ordre élevé, non pris en compte de manière explicite dans l'équation (8), est effectuée en rajoutant sur chaque mode des viscosités artificielles calculées de manière optimale. Cette méthode est décrite dans Bergmann *et al.* (2003).

Après stabilisation des modes POD, une excellente concordance est obtenue entre les coefficients temporels prédits par le système (8) et ceux obtenus par projection des fonctions propres POD sur les résultats de simulation numérique. Une illustration est donnée sur la figure 5 pour un écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$).

5 Approche contrôle optimal

Cette section décrit comment il est possible de déterminer la loi de contrôle $\gamma(t)$ par application de la théorie du contrôle optimal. L'idée de cette approche repose sur la minimisation d'une fonctionnelle objectif \mathcal{J} sur une période T correspondant à quelques périodes de décrochement tourbillonnaire. Par construction, la fonction coût \mathcal{J} incorpore la quantité à optimiser et le coût nécessaire pour y parvenir. Le système réduit POD développé à la section 4 est utilisé afin de modéliser la dynamique de l'écoulement généré par une évolution $\gamma(t)$ de la vitesse tangentielle. Le champ de vitesse étant seul représenté par le système réduit POD, il nous est impossible de choisir pour fonction objectif la traînée aérodynamique du cylindre. Par conséquent, nous chercherons à minimiser une quantité représentative de la traînée, l'instantanéité du sillage i.e. l'énergie du sillage (Graham *et al.*, 1999b). Mathématiquement, cet objectif est défini par la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\tilde{\mathbf{u}}, \gamma(t)) &= \int_0^T \int_{\Omega} J(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \gamma(t)) d\Omega dt \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)\|_2^2 d\Omega dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \gamma(t)^2 dt \end{aligned}$$

Dans cette expression, le premier terme représente l'objectif à atteindre et le second terme le coût lié au contrôle. Les termes de régularisation $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ servent à tenir plus ou moins compte du coût lié au contrôle. Après introduction de la représentation (6) du champ de vitesse, cette fonctionnelle devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) &= \int_0^T J(\mathbf{a}, \gamma(t)) dt \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{gal}} \left(a^{(i)}(t) \right)^2 dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \gamma(t)^2 dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Le problème d'optimisation à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{cases} \min_{\gamma(t)} \mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) \\ \text{t.q.} \\ \mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (11)$$

où les contraintes $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \mathbf{0}$ correspondent au modèle réduit POD (8).

Le problème d'optimisation avec contraintes (11) est résolu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange décrite dans Gunzburger (1997). Les contraintes sont imposées par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange (ou variables adjointes ou de co-état) ξ et d'une nouvelle fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lagrange définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{a}, \gamma, \xi) &= \mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) - \langle \xi, \mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma) \rangle \\ &= \mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma(t)) - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \int_0^T \xi_i(t) \mathcal{N}_i(\mathbf{a}, \gamma) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Les solutions (variables d'état \mathbf{a} , adjointes ξ et loi de contrôle γ) de ce nouveau problème d'optimisation sans contraintes,

sont telles qu'elles rendent la fonctionnelle $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \gamma, \boldsymbol{\xi})$ stationnaire i.e. :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^{(i)}}\delta a^{(i)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma}\delta\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi^{(i)}}\delta\xi^{(i)} \equiv 0$$

où $\delta\mathbf{a}$, $\delta\gamma$ et $\delta\boldsymbol{\xi}$ correspondent à des variations arbitraires.

En supposant² que tous les arguments de \mathcal{L} sont indépendants, le système optimal est déterminé en annulant successivement les dérivées de \mathcal{L} dans les directions $\boldsymbol{\xi}$, \mathbf{a} et γ .

La dérivée de Fréchet $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi^{(i)}}\delta\xi^{(i)}$ redonne l'équation d'état $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \mathbf{0}$.

L'annulation de la dérivée directionnelle suivant les variables d'état \mathbf{a} donne, après intégrations par parties, les équations adjointes

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^{(i)}(t)}{dt} &= -\alpha a^{(i)}(t) \\ &- \sum_{j=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma(t)\mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=1}^{N_{gal}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a^{(k)}(t) \right) \xi^{(j)}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

munies des conditions terminales

$$\xi^{(i)}(T) = 0. \quad (14)$$

Finalement, l'annulation de la dérivée directionnelle suivant la loi de contrôle γ donne la condition d'optimalité

$$\begin{aligned} \delta\gamma(t) &= - \sum_{i=1}^{N_{gal}} \mathcal{D}_i \frac{d\xi^{(i)}}{dt} + \beta\gamma \\ &+ \sum_{i=1}^{N_{gal}} \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \mathcal{F}_{ij} a^{(j)} + 2\mathcal{G}_i \gamma(t) \right) \xi^{(i)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Les conditions nécessaires du premier ordre conduisent à un système couplé d'équations aux dérivées partielles constitué par les équations d'état (8), les équations adjointes (13) et les conditions d'optimalité (15). Ce système d'équations, dénommé *système optimal*, est généralement résolu par la méthode itérative suivante :

On se fixe une loi de contrôle initiale $\gamma(t)$.

1. En utilisant la dernière loi de contrôle obtenue, on résoud le système POD ROM (8) en temps croissant pour obtenir les variables d'état $\mathbf{a}(t)$.
2. En utilisant les variables d'état déterminées en 1, on résoud les équations adjointes (13) en temps décroissant pour obtenir les variables adjointes $\boldsymbol{\xi}(t)$.
3. En utilisant les variables d'état et les variables adjointes respectivement déterminées en 1 et 2, on évalue la condition d'optimalité (15).

² Cette hypothèse est fautive car les variables \mathbf{a} et γ sont liées par l'équation $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \gamma(t)) = \mathbf{0}$.

4. A partir de cette estimation, on calcule une nouvelle loi de contrôle $\gamma_{\text{new}}(t) = \gamma_{\text{old}}(t) + \omega d$ où d est une direction de descente construite à l'aide du gradient $\frac{d\mathcal{J}}{d\gamma} = \delta\mathcal{L}$ et où ω est le pas à effectuer le long de cette direction de descente.
5. Si un critère de convergence est vérifié, on arrête le processus itératif, sinon on retourne à l'étape 1.

6 Loi de contrôle obtenue par le système réduit POD

A la section 4, nous avons montré que le système réduit POD (8) représentait de manière satisfaisante la dynamique de l'écoulement de sillage. Par conséquent, dans cette section, on utilise les résultats de la théorie du contrôle optimal présentés à la section 5 pour déterminer la loi de contrôle $\gamma(t)$.

6.1 Fonctions de base POD généralisées

Dans cette étude, on choisit de ne pas réactualiser la base POD durant le processus itératif de résolution du problème d'optimisation. Le système réduit POD doit donc être capable de représenter toutes les dynamiques intermédiaires intervenant durant la boucle d'optimisation, d'où l'importance de développer un modèle POD précis. Pour cette raison, on décide de suivre l'idée introduite dans Graham *et al.* (1999a) et de générer des fonctions de base POD généralisées. Pour cela, on impose au cylindre une excitation temporelle γ_e qui balaie une large gamme de fréquences et d'amplitudes. Cette excitation, représentée sur la figure 6, est décrite mathématiquement par l'expression :

$$\begin{aligned} \gamma_e(t) &= A_1 \sin(2\pi S_{t1} t) \times \sin(2\pi S_{t2} t - A_2 \sin(2\pi S_{t3} t)) \\ &\text{où } A_1 = 4, A_2 = 18, S_{t1} = 1/120, S_{t2} = 1/3 \text{ et } S_{t3} = 1/60. \end{aligned}$$

Le spectre de l'excitation γ_e représenté sur la figure 7 montre une répartition fréquentielle variant continûment de $S_t = 0$ à $S_t \simeq 0,65$ et présente une légère dominance aux alentours de $S_t \simeq 0,4$.

Les équations de Navier-Stokes sont alors résolues en imposant γ_e pour vitesse tangentielle sur le cylindre. Finalement, la matrice de corrélations temporelles (4) est construite à l'aide de 600 réalisations de l'écoulement prises uniformément sur une période d'excitation égale à $T = 60$. Comparé au cylindre non contrôlé, cet écoulement manipulé présente un nombre beaucoup plus grand de degrés de liberté excités. Cela se traduit directement sur le contenu énergétique des modes POD. En effet, si 2 modes étaient suffisants pour représenter 98% de l'énergie cinétique total en configuration non contrôlé, il est maintenant nécessaire de conserver 40 modes POD (soit encore moins de 7% de l'ensemble des modes POD) lorsque l'excitation γ_e est imposée au cylindre.

6.2 Résultats de contrôle par système réduit POD

Les résultats de cette section correspondent au cas où le coût lié au contrôle est négligé, ce qui revient à poser $\alpha = 1$

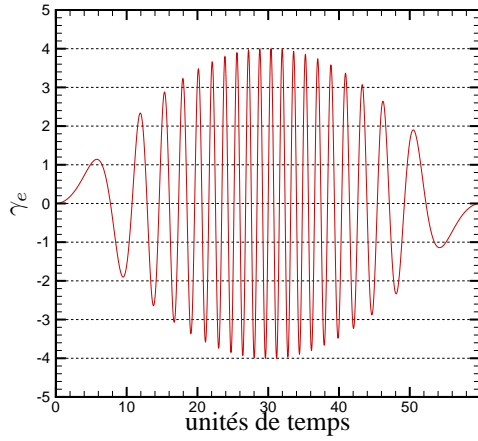


FIG. 6 – Excitation temporelle γ_e imposée au cylindre.

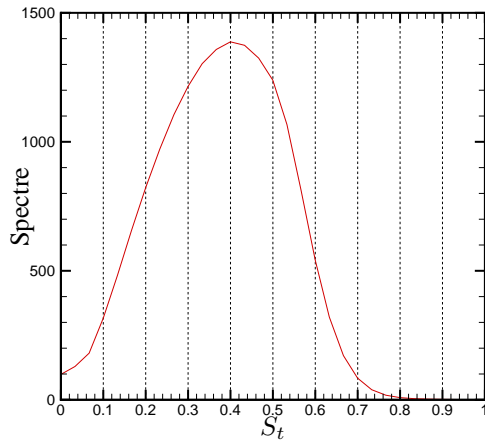


FIG. 7 – Spectre de l'excitation temporelle γ_e .

et $\beta = 0$ dans la fonctionnelle (10). La loi de contrôle γ est déterminée comme la solution convergée du processus itératif présenté à la section 5, la loi de contrôle initiale étant γ_e . Dans le point 4 du processus itératif de résolution, la direction de descente est déterminée par une méthode de gradient, la longueur du pas dans cette direction de descente étant évaluée par une méthode d'Armijo à rebroussement. Cette méthode est classique et les détails peuvent être trouvés dans Nocedal et Wright (1999). Le critère de convergence choisi correspond à $|\Delta \mathcal{J}(\mathbf{a}, \gamma)| = |\mathcal{J}_{\text{new}}(\mathbf{a}, \gamma) - \mathcal{J}_{\text{old}}(\mathbf{a}, \gamma)| < 10^{-5}$. Une fois ce critère de convergence satisfait, la réduction relative de la fonction de coût \mathcal{J} est égale³ à 43%. Finalement, la loi de contrôle optimale γ_{opt} est représentée sur la figure 8.

Des réductions de traînée obtenues par des lois de contrôle harmoniques sont reportées dans Tokumaru et Dimotakis (1991); Baek et Sung (1998); He *et al.* (2000); Homescu *et al.* (2002); Protas et Wesfreid (2002). Afin de comparer nos résultats à ceux de la littérature, nous devons écrire γ_{opt} sous la forme $A \sin(2\pi S_t t)$ et donc déterminer l'amplitude moyenne A et le nombre de Strouhal dominant S_t correspondants. L'amplitude moyenne $A \simeq 2,2$ est facilement déterminée. La figure 9 représente le spectre de la loi de contrôle γ_{opt} : un pic do-

3. La valeur de \mathcal{J} est 9,81 au début du processus et 5,63 après convergence. Pour référence, \mathcal{J} est approximativement égale à 10 pour l'écoulement non contrôlé.

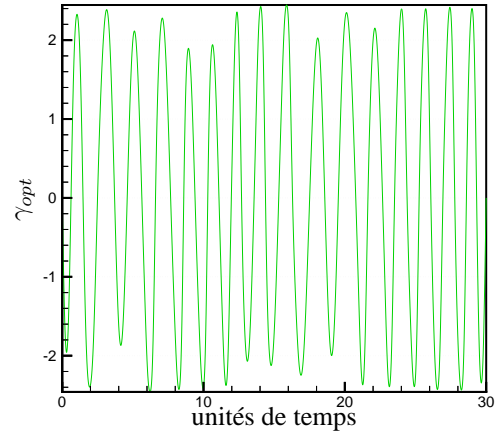


FIG. 8 – Evolution temporelle de la loi de contrôle γ_{opt} .

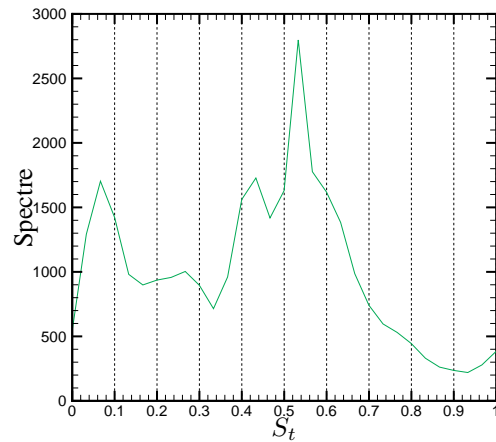


FIG. 9 – Spectre de la loi de contrôle γ_{opt} .

minant apparaît pour un nombre de Strouhal $S_t \simeq 0,53$ et deux autres pics moins énergétiques sont également visibles. D'après He *et al.* (2000), les contributions en terme de réduction de traînée de ces pics secondaires sont négligeables. La loi de contrôle γ_{opt} peut finalement être approchée par une fonction harmonique d'amplitude $A = 2,2$ et de fréquence $S_t = 0,53$.

6.3 Réduction de traînée obtenue par les équations de Navier-Stokes

Par définition du problème d'optimisation (11), la loi de contrôle γ_{opt} est optimale pour le système réduit POD. Cependant, il n'existe aucune preuve de son optimalité pour le modèle de Navier-Stokes. Si il a été montré précédemment que la loi de contrôle γ_{opt} réduisait considérablement l'énergie du sillage, rappelons que l'objectif initial de cette étude était de réduire la traînée aérodynamique du cylindre. Par conséquent, il est nécessaire de résoudre les équations de Navier-Stokes avec la loi de contrôle optimale $\gamma(t) = \gamma_{opt}(t)$ afin de déterminer ses effets sur le coefficient de traînée.

La figure 10 représente une comparaison de l'évolution temporelle du coefficient de traînée pour l'écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$, bleu) et l'écoulement contrôlé ($\gamma = \gamma_{opt}$,

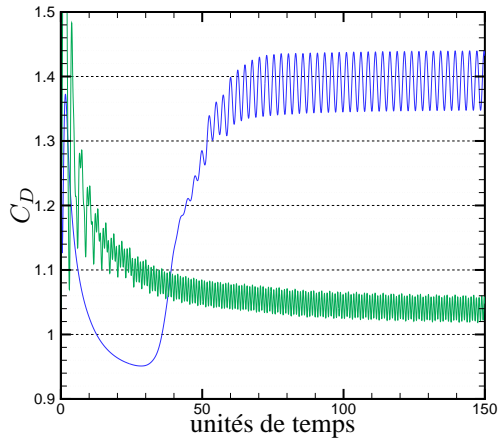


FIG. 10 – Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de traînée dans le cas non contrôlé (bleu) et dans le cas où le contrôle optimal est appliqué (vert).

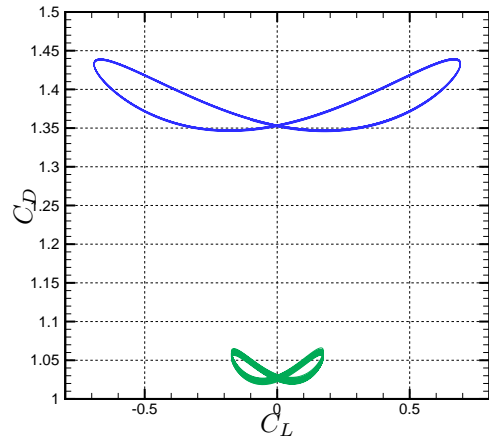


FIG. 12 – Courbes polaires : évolution du coefficient de traînée en fonction du coefficient de portance. Le cycle haut correspond au cas non contrôlé et le cycle du bas correspond au cas où le contrôle optimal est appliqué.

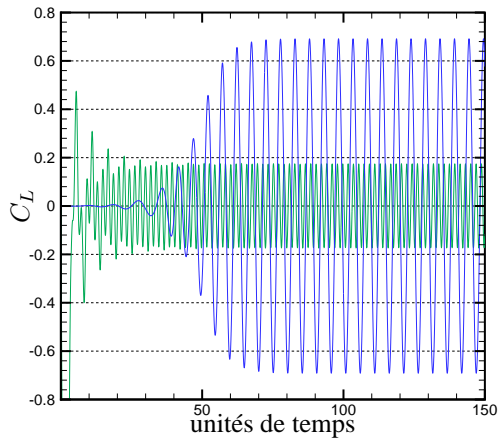


FIG. 11 – Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance dans le cas non contrôlé (bleu) et dans le cas où le contrôle optimal est appliqué (vert).

vert). La réduction de traînée est de l'ordre de 25% (on passe d'une valeur moyenne égale à 1,4 à une valeur moyenne égale à 1,04). Sur la figure 11, on voit une comparaison de l'évolution temporelle du coefficient de portance pour l'écoulement non contrôlé ($\gamma = 0$, bleu) et l'écoulement contrôlé ($\gamma = \gamma_{opt}$, vert). L'amplitude des oscillations est diminuée de manière importante quand le contrôle est appliqué (on passe de 1,38 à 0,34). Ces comportements sont synthétisés sur la figure 12 qui représente les courbes polaires (évolution du coefficient de traînée en fonction du coefficient de portance) pour l'écoulement non contrôlé (en bleu) et l'écoulement contrôlé (en vert). Le spectre de puissance des coefficients aérodynamiques représenté sur la figure 13 montre que l'écoulement contrôlé oscille maintenant à la fréquence de contrôle $S_t = 0,53$. Finalement, les figures 14a) et 14b) présentent respectivement les iso-valeurs de la vorticité en régime non contrôlé et contrôlé (les lignes discontinues correspondent aux valeurs négatives). L'allée de Von-Kármán bien visible sur la figure 14a) en absence de contrôle est très diminuée lorsque le contrôle optimal γ_{opt} est appliqué (figure 14b)). Par ailleurs, on constate que l'écoulement tend à

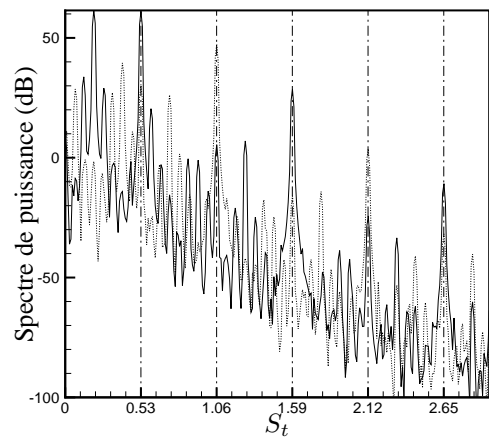


FIG. 13 – Spectres de puissance de la traînée ... et de la portance – pour l'écoulement contrôlé.

se symm triser. Ces résultats sont parfaitement comparables aux effets observés dans Tokumaru et Dimotakis (1991) et He *et al.* (2000).

6.4 Discussion

Les résultats issus de cette étude, utilisant le système réduit POD pour équations d'état du problème de contrôle optimal, sont en grande partie en accord avec ceux obtenus dans d'autres études dans lesquelles les équations de Navier-Stokes étaient utilisées pour équations d'état du problème de contrôle optimal. Par exemple, Protas et Styczek (2002) ont obtenu une réduction de traînée de 15% pour un nombre de Reynolds égal à 150, présentant une contrôlabilité légèrement inférieure à notre configuration d'étude. Les travaux de He *et al.* (2000) montrent que l'on peut obtenir une diminution de traînée de 30% en appliquant un forçage harmonique d'amplitude $A = 3$ et de fréquence $S_t = 0,75$. On constate que les valeurs optimales de l'amplitude et du nombre de Strouhal sont différentes d'une étude à l'autre. Comme cela a été suggéré par Homescu *et al.* (2002), ces différences proviennent

essentiellement de formulations différentes de la fonctionnelle objectif. Les objectifs, tout en étant physiquement identiques (minimisation de la traînée), sont écrits mathématiquement de manières variées.

La réduction de traînée obtenue en prenant les équations de Navier-Stokes comme équations d'état est légèrement supérieure à celle obtenue en utilisant le système réduit POD pour équations d'état. Toutefois, les coûts numériques (CPU et mémoire) mis en jeu dans notre approche sont bien moins importants. Dans notre étude, le temps CPU nécessaire pour résoudre les équations d'état réduite POD sur un horizon T_c représente 1% du temps nécessaire pour résoudre les équations de Navier-Stokes. En première approximation, le même gain est obtenu sur la résolution des équations adjointes et sur l'évaluation de la condition d'optimalité. Le temps de calcul total est donc diminué de manière très importante. En ce qui concerne l'encombrement mémoire, il faut souligner qu'il est nécessaire de stocker les variables d'état pour résoudre les équations adjointes et qu'il faut également sauvegarder les variables adjointes pour évaluer la condition d'optimalité. Lors d'une utilisation des équations de Navier-Stokes pour résoudre un problème de contrôle optimal sur un horizon T_c , il est donc nécessaire de stocker les variables d'état (les deux composantes de vitesse plus la pression) et les variables adjointes associées, à chaque pas de temps et en chaque nœud du maillage éléments finis. Lorsque le système réduit POD est utilisé, seules les variables d'état α , les variables adjointes ξ et les coefficients apparaissant dans l'équation d'état (8) doivent être stockées et cela uniquement pour N_{gal} modes POD. Les paramètres utilisés dans cette étude sont $T_c = 20$ pour l'horizon de contrôle (approximativement trois périodes de Von-Kármán), $\Delta t = 0,01$ pour le pas de temps, $N_v = 12\,000$ pour le nombre de nœuds du maillage et $N_{gal} = 40$ pour le nombre de modes POD retenus dans le système réduit. Le coût en mémoire est alors ici 600 fois inférieur à celui correspondant au cas où le modèle de Navier-Stokes serait utilisé comme équations d'état. La réduction des coûts numériques proposée par notre approche est si importante que le contrôle optimal d'écoulements tridimensionnels autour de géométries complexes devient envisageable. Cependant, comme il est suggéré dans Gunzburger (2000), le succès de notre approche dépend de la capacité de la base POD à représenter la solution optimale au cours du processus d'optimisation. L'utilisation d'un système réduit POD pour résoudre un problème d'optimisation faisant intervenir différentes dynamiques n'est peut être pas si évidente : il serait certainement utile de réactualiser la base POD pendant le processus d'optimisation. Pour cela, Fahl (2000) propose l'utilisation de méthodes à régions de confiance comme critère de réactualisation de la base POD.

7 Conclusions

L'objectif de cette étude était d'illustrer le gain potentiel qui peut être offert par l'utilisation de systèmes réduits POD pour le contrôle optimal d'écoulements. Cette méthode a été présentée en vue de contrôler par rotation instationnaire l'écoulement laminaire ($Re = 200$) autour d'un cylindre circulaire. En définissant une fonctionnelle coût représentative de l'énergie du sillage, le problème de contrôle optimal est résolu en prenant le système réduit POD de l'écoulement contrôlé pour équations d'état. La solution optimale déterminée à l'aide

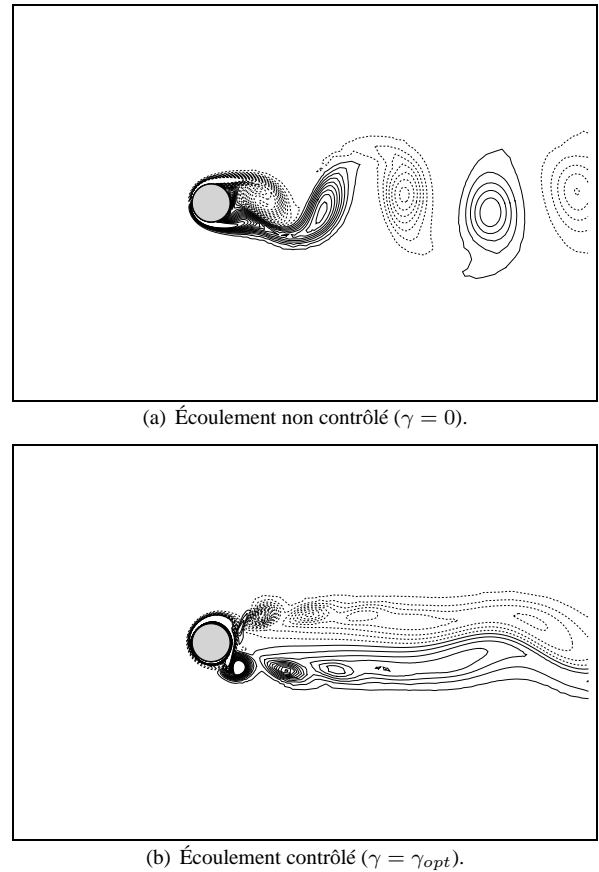


FIG. 14 – Iso-vorticités pour l'écoulement non contrôlé (a) et contrôlé (b) à $t = 150$.

du système réduit POD est alors utilisée pour contrôler numériquement l'écoulement solution des équations de Navier-Stokes. Finalement, une réduction de traînée de l'ordre de 25% est mise en évidence. Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par d'autres équipes de chercheurs (He *et al.*, 2000; Homescu *et al.*, 2002; Protas et Styczek, 2002) en utilisant les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles comme équations d'état. En comparaison avec ces études, l'intérêt principal de notre approche est que nos coûts de calculs (CPU et mémoire) sont négligeables devant les leurs. L'inconvénient majeur est qu'il n'y a aucune preuve que la solution optimale obtenue par le modèle réduit POD converge vers la solution optimale du modèle dynamique original. Comme il est suggéré dans Alexandrov *et al.* (1997), une solution pour s'assurer que la solution optimale du modèle réduit converge au moins vers un minimum local du problème original, est d'utiliser les méthodes à région de confiance. On peut alors se demander si l'approche par système réduit POD est réellement utile dans le contexte du contrôle d'écoulements. Une réponse possible est donnée dans Gunzburger (1997) "without an inexpensive method for reducing the cost of flow computations, it is unlikely that the solution of optimization problems involving the three dimensional, unsteady Navier-Stokes system will become routine".

Références

Alexandrov N., Dennis Jr J.E., Lewis R.M. et Torczon V. (1997) : A Trust Region framework for managing the use of approximation models in optimization. *Icase report*, N°. 97-50.

- Baek S.J. et Sung H.J. (1998) : Numerical simulation of the flow behind a rotary oscillating circular cylinder. *Phys. Fluids*, **10** (4), pp. 869-876.
- Barkley D. et Henderson R.D. (1996) : Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, **322**, pp. 215-241.
- Bergmann M., Cordier L. et Brancher J.-P. (2003) : Optimisation d'un modèle d'ordre réduit basé sur la Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres. *LEMTA research report*.
- Braza M., Chassaing P. et Ha Minh H. (1986) : Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, **165**, pp. 79-130.
- Cordier L. et Bergmann M. (2002a) : Proper Orthogonal Decomposition: an overview. *Lecture Series 2002-04 and 2003-03* on post-processing of experimental and numerical data, Von Kármán Institute for Fluid Dynamics.
- Cordier L. et Bergmann M. (2002b) : Two typical applications of POD: coherent structures eduction and reduced order modelling. *Lecture Series 2002-04 and 2003-03* on post-processing of experimental and numerical data, Von Kármán Institute for Fluid Dynamics.
- Fahl M. (2000) : Trust-Region methods for flow control based on Reduced Order Modeling. *PhD dissertation, Trier university*.
- Graham W.R., Peraire J. et Tang K.T. (1999a) : Optimal Control of Vortex Shedding Using Low Order Models. Part 1. Open-Loop Model Development. *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg.*, **44**(7), pp. 945-972.
- Graham W.R., Peraire J. et Tang K.T. (1999b) : Optimal Control of Vortex Shedding Using Low Order Models. Part 2: Model-based control. *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg.*, **44**(7), pp. 973-990.
- Gunzburger M. (1997) : Lagrange multiplier techniques. *Lecture series 1997* on inverse design and optimization methods, Von Kármán Institute for Fluid Dynamics.
- Gunzburger M. (2000) : Adjoint equation-based methods for control problems in incompressible, viscous flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, **65**, pp. 249-272.
- He J.-W., Glowinski R., Metcalfe R., Nordlander A. et Périoux J. (2000) : Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder. Part 1. Oscillatory cylinder rotation. *J. Comp. Phys.*, **163**, pp. 83-117.
- Henderson R.D. (1997) : Nonlinear dynamics and patterns in turbulent wake transition. *J. Fluid Mech.*, **352**, pp. 65-112.
- Homescu C., Navon I.M. et Li Z. (2002) : Suppression of vortex shedding for flow around a circular cylinder using optimal control. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **38**, pp. 43-69.
- Lumley J.L. (1967) : The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, ed. A.M. Yaglom & V.I. Tatarski, pp. 166-178.
- Noack B.R. et Eckelmann H. (1994) : A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, **270**, pp. 297-330.
- Nocedal J. et Wright S.J. (1999) : Numerical Optimization. *Springer series in operations research*.
- Protas B. et Styczek A. (2002) : Optimal rotary control of the cylinder wake in the laminar regime. *Phys. Fluids*, **14** (7), pp. 2073-2087.
- Protas B. et Wesfreid J.E. (2002) : Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the laminar regime. *Phys. Fluids*, **14** (2), pp. 810-826.
- Sirovich L. (1987) : Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1: Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics* **XLV**, N° 3, pp. 561-571.
- Tokumaru P.T. et Dimotakis P.E. (1991) : Rotary oscillatory control of a cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, **224**, pp. 77-90.
- Williamson C.H.K. (1996) : Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, **28**, pp. 477-539.